

Rissbildung von Stahlbeton unter Einbeziehung stochastischer Felder

U. Häußler-Combe^{1*}, J. Hartig¹

¹ Institut für Massivbau, Technische Universität Dresden

Zusammenfassung

Der Beitrag untersucht den Einfluss streuender Betonzugfestigkeiten auf die statistischen Eigenschaften der Betonrissbreiten in Stahlbetonzugstäben. Die Streuung der Betonzugfestigkeit wird durch ein stochastisches Feld modelliert. Im Rahmen eines Monte-Carlo-Verfahrens sind Realisierungen des stochastischen Feldes Eingangsgrößen in ein deterministisches Grundmodell auf Basis der Finite-Element-Methode, welches als Ergebnisgrößen eine Grundgesamt von Rissbreitenergebnissen liefert, die statistisch ausgewertet werden. Es zeigt sich, dass insbesondere die Korrelationslänge des stochastischen Feldes der Betonzugfestigkeiten einen erheblichen Einfluss auf die statistischen Kennwerte der Rissbreiten hat. So ergeben sich bei angenommener Gaußscher Verteilung der Zugfestigkeit abhängig von der Wahl der Korrelationslänge große Unterschiede in den Verteilungen der Rissbreiten, die z.B. teilweise ausgeprägt bimodal sind. Darüber hinaus zeigen sich Skaleneffekte, indem die Rissbreitenkennwerte von den Bauteilabmessungen abhängig sind.

Keywords: Stahlbeton, Rissbildung, Stochastische Felder, Monte-Carlo-Analyse

* Kontakt: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Häußler-Combe, Institut für Massivbau, Technische Universität Dresden, D-01062 Dresden, E-Mail: ulrich.haeussler-combe [at] tu-dresden.de

1 Einführung

Stahlbeton ist ein Verbundwerkstoff bei dem Druckbeanspruchungen im Wesentlichen durch den Beton und Zugbeanspruchungen durch die Bewehrung aufgenommen werden. Wegen der beschränkten Zugfestigkeit des Betons ist ein charakteristisches Merkmal der Stahlbetonbauweise die Rissbildung des Betons in zugbeanspruchten Bereichen. Sofern die Rissbreiten etwa unterhalb 0,3 mm verbleiben, ist dies jedoch kein Mangel. Aufgrund der Fähigkeit zur Spannungsumlagerung von hoch- in niedrigbelastete Bereiche trägt die Rissbildung sogar zur Robustheit von Stahlbetontragwerken bei. Bei größeren Rissbreiten leidet das Erscheinungsbild, nehmen die Verformungen zu und das Risiko der Beeinträchtigung der Dauerhaftigkeit wächst.

In diesem Zusammenhang besteht ein Problem darin, dass wesentliche Einflussfaktoren zur Rissbildung wie z.B. die Zugfestigkeit des Betons Streuungen unterliegen. Entsprechend ergeben sich Streuungen der Rissbreiten. Zur Abschätzung der Auswirkungen der Rissbildung auf Gebrauchstauglichkeit und Tragfähigkeit ist die Kenntnis der Streueigenschaften der Rissbreiten von Nutzen. Dazu wird im Folgenden ein Modell entwickelt. Betrachtet werden Stahlbetonzugstäbe, die auch stellvertretend für die Zugzone von Stahlbetonbiegeträgern stehen. Zunächst wird auf der Grundlage der Finite-Elemente-Methode ein sog. deterministisches Grundmodell entwickelt, das die wesentlichen Eigenschaften des gerissenen Stahlbetons abbildet. Weiterhin wird ein stochastisches Modell für die Betonzugfestigkeit dargestellt. Beide werden in einer Monte-Carlo-Methode zusammengeführt, um Aussagen über die stochastischen Eigenschaften der Rissbildung zu gewinnen.

2 Ein numerisches Simulationsmodell zur Rissbildung

Für das Beton- und Bewehrungszugtragverhalten werden jeweils eindimensionale Stabmodelle verwendet, die als Segmente bezeichnet werden. Beide Segmente werden durch Verbundelemente gekoppelt, siehe Abbildung 1.

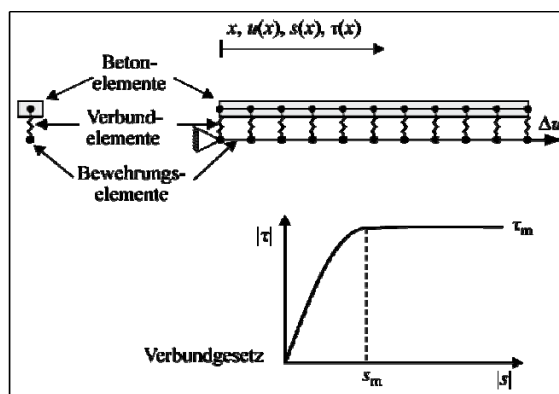


Abbildung 1: Segmentmodell für den Stahlbetonzugstab.

Die Diskretisierung sowohl des Betonsegments als auch des Bewehrungssegments erfolgen auf der Grundlage der Finite-Elemente-Methode mit eindimensionalen

Stabelementen mit 2 Knoten und linearem Verschiebungsansatz für die Längsverschiebungen. Dabei wird für beide Segmente die gleiche Elementzahl verwendet und Finite-Element-Knoten von Betonsegment und Bewehrungssegment liegen in der unverformten Ausgangskonfiguration geometrisch aufeinander. Aufeinanderliegende Knoten werden jeweils durch eine nichtlineare Verbundfeder gekoppelt. Als Randbedingung wird auf der linken Seite die Verschiebung des Bewehrungsknotens zu Null gesetzt, als Belastung auf der rechten Seite die Verformung des Bewehrungsknotens vorgegeben.

Als Materialgesetze werden für das Betonsegment ein einaxiales, linear elastisches Verhalten mit beschränkter Zugfestigkeit, für das Bewehrungssegment ein einaxiales, elastoplastisches Verhalten und für den Verbund ein nichtlineares Verhalten mit beschränkter Verbundfestigkeit angenommen. Das Nachbruchverhalten des Betons wird zur Vereinfachung vernachlässigt, da sie für bewehrten Beton einen eher untergeordneten Einfluss hat. Insgesamt liegt ein nichtlineares System vor. Die Lösung wird inkrementell iterativ ermittelt, d.h. die Belastung wird schrittweise aufgebracht und innerhalb jedes Belastungsschrittes wird der Gleichgewichtszustand mit einem iterativen Verfahren, siehe Matthies und Strang (1979), ermittelt.

Dazu soll ein Berechnungsbeispiel betrachtet werden. Es handelt sich um einen bewehrten Zugstab mit einer Länge von 3 m, der auch für experimentelle Untersuchungen verwendet wurde, siehe Eckfeldt u.a. (2009). Die Modelldaten dieses

Beton	
E-Modul	33 200 MN/m ²
Mittelwert Zugfestigkeit	3,5 MN/m ²
Zufallsfeld Betonzugfestigkeit	
Standardabweichung Zugfestigkeit	0,7 MN/m ²
Korrelationslänge Zugfestigkeit	0,10 m
Verbund	
Max. Verbundfestigkeit	6,3 MN/m ²
Schlupf bei Verbundfestigkeit	≥ 0,1 mm
Bewehrung	
Anzahl und Durchmesser	1 Ø 20 mm
Querschnitt	3,14 cm ²
Betonquerschnitt	
Effektiver Bewehrungsgehalt	0,12 x 0,12 m ² 2,18 %

Stabes sind in der Tabelle angegeben. Die Werte für E-Modul, Zugfestigkeit, Bewehrung und Betonquerschnitt wurden von den Versuchsdaten übernommen. Der Verlauf des angenommenen Verbundgesetzes – Verbundspannung in Abhängigkeit vom Schlupf – ist im Bild 1 dargestellt. Neben der maximalen Verbundspannung, die hier nach DIN 1045-1 (2008) mit $\tau_m = 1,8 f_{ct}$ ange-

nommen wird, ist der Verlauf durch den zugeordneten Schlupf s_m charakterisiert. Bei der Wahl dieses Parameters besteht ein gewisser Ermessensspielraum. Die Diskretisierung wird mit jeweils 300 Elementen für das Beton- und Bewehrungssegment mit einer Elementlänge von $L_e = 0,01$ m, 301 Verbundelementen und 602 Knoten und damit auch 602 Freiheitsgraden vorgenommen. Eine Verfeinerung der Diskretisierung erbringt nur unwesentlich andere Ergebnisse.

Zunächst werden zwei Fälle betrachtet, nämlich eine determinierte, konstante Zugfestigkeit entlang der Stabachse, sowie streuende Zugfestigkeiten in einem eindimensionalen Zufallsfeld, wobei als Mittelwert die Zugfestigkeit des ersten Falles angenommen wird. Es wird eine Normalverteilung vorausgesetzt, wobei die Standardabweichung aus Fraktilwerten in Anlehnung an DIN 1045-1 (2008) gewählt wird. Als Korrelationslänge wird zunächst ein Wert von 0,1 m angenommen. Grundlagen zu Zufallsfeldern sowie Methoden zur Synthese einer

Menge solcher Felder werden in den folgenden Abschnitten näher erläutert. Für das Berechnungsbeispiel wird exemplarisch eine Realisierung bzw. Stichprobe herausgegriffen. Abbildung 2 zeigt die berechneten Kraft-Verformungskurven, wobei die Verformung am gezogenen Endknoten ermittelt wurde. Aufgrund der Wegsteuerung ergibt sich bei Überschreiten der Zugfestigkeit infolge des plötzlichen Steifigkeitsverlustes ein Sägezahneneffekt. Bei Berücksichtigung des Betonbruchverhaltens wäre dies weniger ausgeprägt. Im Vergleich der determinierten mit der stochastischen Zugfestigkeit zeigt sich für Letztere ein gleichmäßigerer Verlauf der Spannungs-Dehnungskurve.

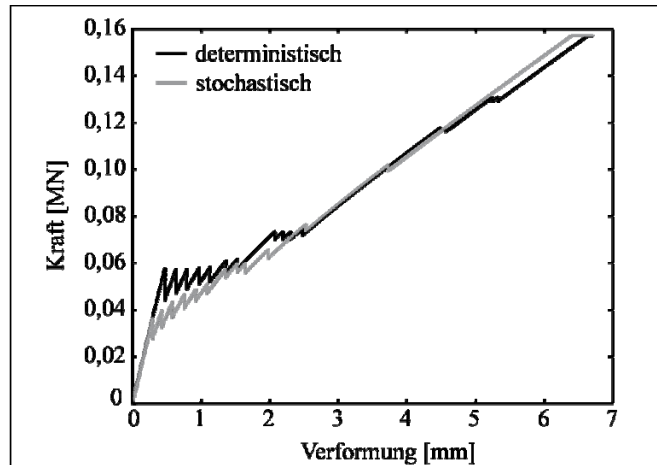


Abbildung 2: Spannungs-Dehnungsbeziehungen des Rechenbeispiels.

In Abbildung 3a sind die berechneten Verläufe der Bewehrungsspannung bei $\sigma_{sr} = 350 \text{ MN/m}^2$ dargestellt, in Abbildung 3b die entsprechenden Betonspannungen. In den Rissen sind die Betonspannungen Null, die Bewehrungsspannungen erreichen ihren Maximalwert. Schließlich stellt Abbildung 4 die zugehörigen berechneten Verschiebungen von Beton, Bewehrung sowie den Schlupf zwischen Beton und Bewehrung dar.

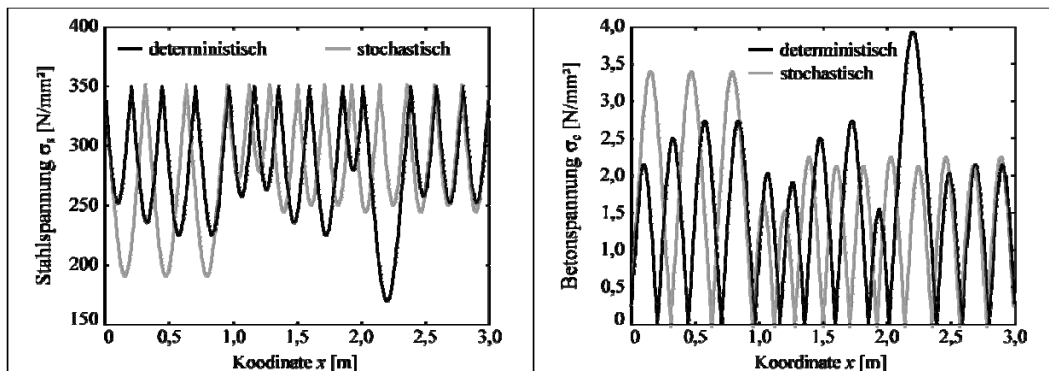


Abbildung 3: Rechenbeispiele a) Bewehrungsspannungen b) Betonspannungen.

An denjenigen Stellen, wo die Verformung von Betonsegment und Bewehrungssegment übereinstimmen, ist der Schlupf Null. An den Endknoten eines gerissenen Betonelements tritt jeweils betragsmäßig der größte Schlupf gegenüber den Knoten der Bewehrungselemente auf. Die rechnerische Rissbreite ergibt sich, indem zu den beiden extremalen Schlupfwerten noch die Relativverschiebung der Endknoten des betroffenen Bewehrungselements hinzu addiert wird. Die so be-

rechnete Rissbreite entspricht der Relativverschiebung der Endknoten des gerissenen Betonelements. Die Länge des gerissenen Betonelements wiederum entspricht der Länge des spannungsfreien Bereichs im Beton beidseitig des Risses. Insofern hat die Diskretisierung mit der Wahl der Elementlänge einen geringen Einfluss auf die berechneten Rissbreiten.

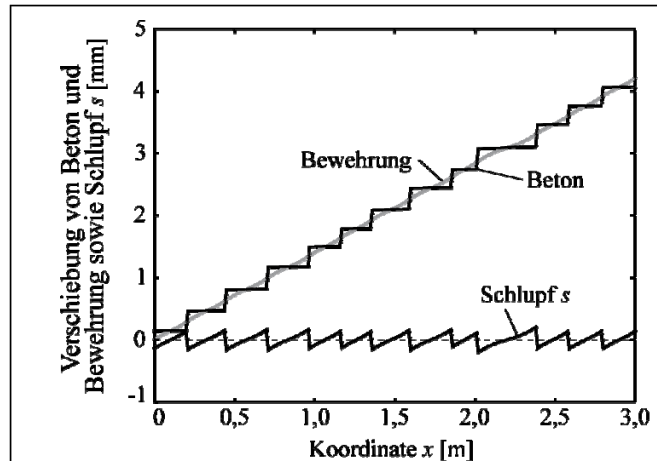


Abbildung 4: Verschiebungen im Rechenbeispiel.

3 Die Stochastik der Betonzugfestigkeit

Die stochastische Sichtweise betrachtet nicht mehr einzelne Werte y einer Größe, sondern deren Grundgesamtheit Y . Zur Beschreibung dieser Grundgesamtheit dient die Verteilungsfunktion (CDF) $F(y)$ mit der Eigenschaft $0 \leq F(y) \leq 1$, wobei $F(y)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass der Wert y nicht überschritten wird. Zugehörig ist die Verteilungsdichte (PDF) $f(y)$, die durch Differentiation von $F(y)$ bestimmt wird. Zur Charakterisierung dienen zunächst der Mittelwert

$$\mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy, \quad (1)$$

die Varianz

$$\sigma_{yy} = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 f(y) dy, \quad (2)$$

die Standardabweichung

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{yy}} \quad (3)$$

und der Variationskoeffizient

$$\gamma_y = \frac{\sigma_y}{\mu_y}. \quad (4)$$

Werden zwei Größen mit Werten y, z betrachtet, so wird aus stochastischer Sicht ihr Zusammenhang durch die Kovarianz

$$\sigma_{yz} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)(z - \mu_z) f(y, z) dy dz \quad (5)$$

beschrieben, wobei $f(y, z)$ die gemeinsame Verteilungsdichte angibt. Aus der Kovarianz wird die Korrelation

$$\rho_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{\sigma_y \sigma_z} \quad (6)$$

abgeleitet. Für $\rho_{yz} = 0$ besteht keine lineare stochastische Abhängigkeit zwischen Y und Z , für $\rho_{yz} = 1$ die vollständige lineare Abhängigkeit.

Zur Modellierung der streuenden Zufallsgrößen über einen räumlichen Bereich können Zufallsfelder verwendet werden. Hier wird eine Grundgesamtheit von nominell gleichen Stahlbetonstäben angenommen. Jeder Stahlbetonstab hat in jedem Querschnitt entlang seiner Längsachse eine streuende Zugfestigkeit und es wird angenommen, dass auch damit eine Grundgesamtheit gegeben ist. Betrachtet man an allen Stäben eine beliebige feste Stelle x_1 mit einer Größe mit den Werten y_1 , so ergibt sich eine weitere Grundgesamtheit Y_1 . Schließlich wird eine zweite Stelle x_2 mit der Grundgesamtheit Y_2 derselben Größe betrachtet. Unter der Annahme, dass Y_1, Y_2 dieselben statistischen Kennwerte haben, z.B. den Mittelwert μ_y , die Varianz σ_{yy} und die Standardabweichung σ_y , kann für die Charakterisierung des Zufallsfeldes die Kovarianz

$$\sigma_{y_1 y_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y_1 - \mu_y)(y_2 - \mu_y) f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad (7)$$

verwendet werden, also der stochastische Zusammenhang einer Größe in Abhängigkeit vom Ort. Hierfür werden i.d.R. Ansätze festgelegt. Gebräuchlich ist neben anderen eine Form

$$\sigma_{y_1 y_2}(x_1, x_2) = \sigma_{yy} e^{-\left(\frac{|x_1 - x_2|}{L_y}\right)^2} \quad (8)$$

Hiermit ergibt sich als weiterer Parameter des Zufallsfeldes die Korrelationslänge L_y . Für $L_y \rightarrow 0$ ist $\sigma_{y_1 y_2} \rightarrow 0$ damit $\rho_{y_1 y_2} \rightarrow 0$, die Zugfestigkeiten entlang den Stabachsen sind also stochastisch linear unabhängig voneinander. Für $L_y \rightarrow \infty$ ist $\sigma_{y_1 y_2} \rightarrow \sigma_{yy}$ und damit $\rho_{y_1 y_2} \rightarrow 1$, die Zugfestigkeiten entlang der Stabachse sind also stochastisch vollständig voneinander abhängig bzw. unterliegen keiner Streuung entlang der Stabachse. Dazu sind in Abbildung 5 zwei Felder dargestellt, eines mit kurzer und eines mit langer Korrelationslänge. Für $x_1 = x_2 = x$ liefert Gl. (8) unabhängig von der Wahl der Korrelationslänge die Varianz σ_{yy} . Damit hat in Übereinstimmung zu den Vorgaben die Größe Y an einer beliebigen Stelle x – gemessen über alle Stäbe – die Varianz σ_{yy} .

In der betrachteten Problemstellung unterliegen insbesondere die Betoneigenschaften Streuungen. Dies betrifft die Betonzugfestigkeit, den anfänglichen Elastizitätsmodul des Betons und die Verbundfestigkeit. Beton- und Bewehrungsquerschnitt und der effektiven Bewehrungsgehalt können hier als nicht streuende konstante Größen angesehen werden. Von den genannten Betoneigenschaften weisen erfahrungsgemäß der E-Modul und die Verbundfestigkeit eine hohe Korrelation zur Zugfestigkeit auf. Dabei ist der Variationskoeffizient des E-Moduls erfahrungsgemäß deutlich kleiner. Die Zugfestigkeit f_{ct} wird im Rahmen dieses Beitrages als Leitgröße gewählt.

Der versuchstechnische Aufwand, um zur direkten Bestimmung der Zugfestigkeit homogene Zugspannungszustände zu erreichen, ist nun sehr hoch. Außerdem ist dabei eine Abhängigkeit von der Größe des Probenkörpers gegeben, da dieser an seiner schwächsten Stelle versagt und größere Probenkörper eine größere Festig-

keitsstreuung aufweisen. Alternativ werden deshalb die Biegezugfestigkeit nach DIN EN 12390-5 (2006) oder die Spaltzugfestigkeit nach DIN EN 12390-6 (2006) ermittelt. Umrechnungsfaktoren zwischen diesen Kennwerten der Zugfestigkeit sind in CEB-FIP (2008) gegeben. In DIN 1045-1 (2008) wird der 5%-Fraktilwert der Zugfestigkeit mit $f_{ct;0,05} = 0,7 f_{ctm}$ und der 95%-Fraktilwert mit $f_{ct;0,95} = 1,3 f_{ctm}$ bei einem Mittelwert f_{ctm} angenommen. Bei Annahme einer Normalverteilung ergibt sich eine Standardabweichung σ mittels $\Phi(0,3f_{ctm}/\sigma) = 0,95$ mit der standardisierten Verteilungsfunktion Φ bzw. $\sigma = 0,3 f_{ctm}/1,645 = 0,18 f_{ctm}$ und damit ein Variationskoeffizient 0,18. Im Gegensatz zu Mittelwert und Standardabweichung liegen für die Korrelationslänge der Zugfestigkeit praktisch keine verwertbaren Daten vor.

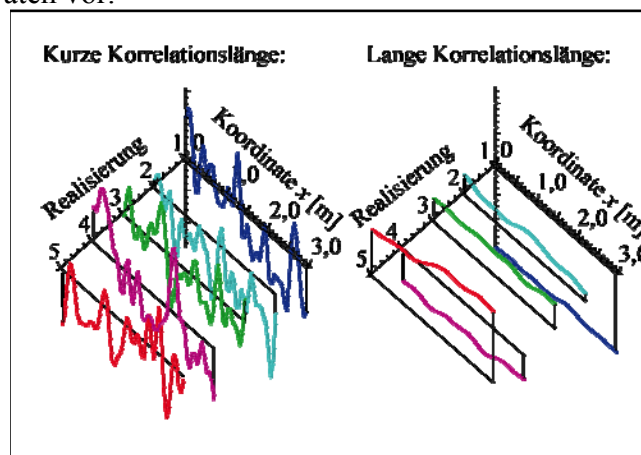


Abbildung 5: Stochastische Felder bei kurzer und langer Korrelationslänge.

4 Synthese von Zufallsfeldern der Betonzugfestigkeit

Das Standardverfahren für stochastische Simulationen ist die Monte-Carlo-Methode. Zugrunde liegt ein deterministisches Simulationsmodell mit stochastischen Eingangsparametern. Die grundlegende Operation besteht in der Synthese einer Stichprobe, d.h. die Werte der stochastischen Eingangsparameter werden – im Rahmen ihrer statistischen Kennzahlen – zufällig bestimmt. Als effizientes Verfahren dient dazu das Latin-Hypercube-Sampling, damit wird mit vergleichsweise wenig Aufwand insgesamt eine repräsentative Stichprobenmenge erzeugt. Für eine Stichprobe liefert das Simulationsmodell Ergebnisparameter. Bei einer repräsentativen Stichprobenmenge ergeben sich die stochastischen Kennzahlen der Ergebnisparameter. Diese bilden das Ergebnis der Monte-Carlo-Simulation. Dabei sind die statistischen Kennzahlen der Eingangsparameter vorzugeben. Die Menge der Stichproben ist so zu bestimmen, dass die daraus resultierenden Kennzahlen mit den vorgegebenen Kennzahlen übereinstimmen. Für das spezielle Problem der Synthese eines eindimensionalen Feldes der Zufallsvariablen Y wird zur Darstellung einer Stichprobe der Ansatz

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (9)$$

verwendet, siehe Spanos und Zeldin (1998), Vořechovský (2008). Darin sind c_k geeignete Koeffizienten und $\varphi_k(x)$ eine Menge orthogonaler Basisfunktionen, d.h.

$$\int_0^L \varphi_l(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} L_k & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases} \quad (10)$$

wobei der Wert L_k nicht vorbestimmt ist. Die Integration erfolgt über die geometrische Länge L des stochastischen Feldes. Gl. (9) ist ein allgemein gebräuchlicher Ansatz zur Darstellung von Funktionen, ein bekanntes Beispiel sind Fourierreihen. Die Auflösung nach den Koeffizienten liefert

$$c_k = \frac{1}{L_k} \int_0^L y(x) \varphi_k(x) dx. \quad (11)$$

Da $y(x)$ die Stichprobe eines Zufallsfeldes ist, ist c_k die Stichprobe des Zufallskoeffizienten C_k . Es sei zunächst vorausgesetzt, dass das Zufallsfeld Y einer Normalverteilung unterliegt. Mit dem Mittelwert μ_y von Y ergibt sich dann für C_k der Mittelwert

$$\mu_{c_k} = \frac{\mu_y}{L_k} \int_0^L \varphi_k(x) dx. \quad (12)$$

Betrachtet man zwei Zufallskoeffizienten C_k, C_l , so besteht zwischen diesen die Kovarianz

$$\sigma_{c_k c_l} = \frac{1}{L_k L_l} \int_0^L \int_0^L \sigma_{y_1 y_2}(x_1, x_2) \varphi_k(x_1) \varphi_l(x_2) dx_1 dx_2 \quad (13)$$

wobei die Kovarianz $\sigma_{y_1 y_2}$ nach Gl. (7) gegeben ist. Damit ergibt sich ein Konzept zur Synthese eines normalverteilten stochastischen Feldes mit gegebenem Mittelwert μ_y und gegebener Kovarianz $\sigma_{y_1 y_2}$. Mit Gl. (12), (13) lassen sich Mittelwerte μ_{c_l}, μ_{c_k} und Kovarianz $\sigma_{c_l c_k}$ der Zufallskoeffizienten C_k, C_l bestimmen. Wegen der Normalverteilung von Y gehorchen mit Gl. (11) auch C_k, C_l einer Normalverteilung. Schließlich lassen sich nach Maßgabe von Mittelwert und Kovarianz – aus letzterer ergibt sich auch die Varianz bzw. Standardabweichung – Stichprobenwerte c_k, c_l erzeugen. Diese Überlegungen gelten für beliebige Paare von Zufallskoeffizienten. Insgesamt wird die Stichprobe eines Zufallsvektors \mathbf{C} gewonnen, dessen Komponenten bei gegebenen Basisfunktionen wiederum für die Stichprobe des Zufallsfeldes $y(x)$ nach Gl. (9) verwendet werden. Hierbei kann, wie noch gezeigt wird, die Summenbildung auf eine endliche Anzahl von Komponenten beschränkt werden.

Für die praktische Umsetzung stellt sich zunächst das Problem, wie die Basisfunktionen bestimmt werden. Hier soll der Ansatz nach Karhunen-Loève verfolgt werden, d.h. die Basisfunktionen sollen die Bedingung

$$\int_0^L \sigma_{y_1 y_2}(x_1, x_2) \varphi_k(x_1) dx_1 = \lambda_k \varphi_k(x_2) \quad (14)$$

erfüllen. Damit wird ein Eigenwertproblem gestellt. Es sei vorausgesetzt, dass es lösbar ist, wobei sich neben $\varphi_k(x)$ der Eigenwert λ_k ergibt. Verwendet man Gl. (14) in Gl. (13) und berücksichtigt Gl. (10), so ergibt sich

$$\sigma_{c_k c_l} = \frac{\lambda_k}{L_k L_l} \int_0^L \varphi_k(x_2) \varphi_l(x_2) dx_2 = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{L_k} & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}. \quad (15)$$

Es zeigt sich, dass die Komponenten des Zufallsvektors \mathbf{C} voneinander stochastisch unabhängig sind, weiterhin hat die Komponente C_k die Varianz λ_k/L_k

bzw. Standardabweichung $\sqrt{\lambda_k / L_k}$. Mit der stochastischen Unabhängigkeit der Komponenten von \mathbf{C} vereinfacht sich die Erzeugung dieses Zufallsvektors.

Es verbleibt die Betrachtung des Eigenwertproblems Gl. (14). Es soll mit einem numerischen Verfahren gelöst werden. Dazu wird Gl. (14) numerisch integriert. Dies kann mit

$$\int_0^L \sigma_{y_1 y_2}(x_i, x_j) \varphi_k(x_j) dx_j \approx \Delta x \sum_{j=1}^N \sigma_{y_1 y_2}(x_i, x_j) \varphi_k(x_j) \quad (16)$$

mit diskreten Stützstellen $x_j = j \Delta x$, $\Delta x = L/N$ erfolgen. Der Parameter N gibt somit die Diskretisierung des Zufallsfeldes an. Die Positionen der Stützstellen stimmen mit den Positionen der Integrationspunkte der Stabelemente überein. Die Summe der rechten Seite von Gl. (16) kann als Matrixprodukt $\mathbf{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k$ dargestellt werden, wobei $\mathbf{\Sigma}$ die Kovarianzmatrix des stochastischen Feldes und $\boldsymbol{\varphi}_k$ die diskretisierte k -te Basisfunktion bzw. der k -te Basisvektor sind. Die Gln. (14), (16) ergeben damit ein algebraisches Eigenwertproblem

$$\Delta x \mathbf{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k = \lambda_k \boldsymbol{\varphi}_k \quad (17)$$

wobei $\mathbf{\Sigma}$ eine reelle, positiv-definite, symmetrische Matrix der Dimension $N \times N$ ist. Damit wird die Gl. (17) durch die reellen Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_k$ mit zugehörigen reellen, positiven Eigenwerten λ_k , $k = 1 \dots N$ gelöst. Dabei sind verschiedene Eigenvektoren zueinander orthogonal. Der Betrag eines Eigenvektors kann jeweils mit 1 angenommen werden. Somit ergibt sich

$$\Delta x \boldsymbol{\varphi}_l \cdot \boldsymbol{\varphi}_k = \begin{cases} \Delta x & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases} \quad (18)$$

Dies ist die diskretisierte Form von Gl. (10). Es zeigt sich, dass die Karhunen-Loève-Bedingung die Orthogonalitätsbedingung Gl. (10) einschließt. Weiterhin kann $L_k = \Delta x$ gesetzt werden. Damit ergibt sich eine formale Vereinfachung, indem statt Gl. (17) das Eigenwertproblem $\mathbf{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k = \lambda'_k \boldsymbol{\varphi}_k$ gelöst wird. Dann ist $\lambda_k = \Delta x \lambda'_k = L_k \lambda'_k$ und der auf der diskretisierten Form von Gl. (11) basierende Zufallskoeffizient C_k hat entsprechend Gl. (15) die Varianz λ'_k bzw. Standardabweichung $\sigma_{c_k} = \sqrt{\lambda'_k}$ und entsprechend Gl. (12) den Mittelwert $\mu_{c_k} = \mu_y \sum_{j=1}^N \varphi_k(x_j)$.

Damit lässt sich das bereits angeführte Konzept zur Synthese eines normalverteilten stochastischen Feldes enger fassen. Auf der Grundlage der gegebenen Kovarianzmatrix des stochastischen Feldes können die Basisvektoren $\boldsymbol{\varphi}_k$ mit Eigenwerten λ'_k und weiterhin der Mittelwert μ_{c_k} und die Varianz bzw. Standardabweichung σ_{c_k} für alle Zufallskoeffizienten C_k bestimmt werden. Diese sind unter den gegebenen Voraussetzungen normalverteilt. Mit Gl. (9) liefert

$$y(x_i) = \sum_{k=1}^m \xi_k \varphi_k(x_i) \quad (19)$$

eine diskretisierte Stichprobe des Zufallsfeldes, wenn ξ_k jeweils die Stichprobe einer Normalverteilung mit dem Mittelwert μ_{c_k} und der Standardabweichung σ_{c_k} ist. Dabei sind die den Stichproben ξ_k , ξ_l zugrundeliegenden Zufallsvariablen jeweils stochastisch voneinander unabhängig. Schließlich lässt sich zeigen, dass Eigenformen mit abnehmend kleinen Eigenwerten auch einen abnehmenden

Beitrag liefern. Damit kann in Gl. (19) die Beschränkung auf eine endliche Anzahl von m Anteilen bzw. Eigenformen erfolgen.

Schließlich bleibt der Fall zu betrachten, dass das stochastische Feld nicht einer Normalverteilung unterliegt. Die zugehörige Zufallsvariable sei mit Z bezeichnet. Dazu besteht eine Verteilungsfunktion $F(z)$, die Verteilungsdichte $f(z)$, sowie Mittelwert μ_z und Standardabweichung σ_z . Diese werden alle als bekannt vorausgesetzt. Weiter sei vorausgesetzt, dass die Verteilungsfunktion invertierbar ist, d.h. bei gegebener Zahl p mit $0 \leq p \leq 1$ lässt sich mit $z = F^{-1}(p)$ ein Wert z bestimmen, der mit der Wahrscheinlichkeit p unterschritten wird. Es sei Φ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung mit dem Mittelwert 0, der Standardabweichung 1 und der Verteilungsdichte ϕ . Dann ist mit

$$F(z) = \Phi(y) \rightarrow \begin{cases} z = F^{-1}(\Phi(y)) \\ y = \Phi^{-1}(F(z)) \end{cases} \quad (20)$$

eine Transformationsregel zwischen der Zufallsvariablen Z und der standard-normalverteilten Zufallsvariablen Y gegeben. Für die Verteilungsdichten gilt entsprechend

$$f(z) dz = \phi(y) dy. \quad (21)$$

Weiterhin werden wieder zwei Stellen x_1, x_2 betrachtet. Die nicht-normalverteilten Zufallsvariablen Z_1, Z_2 umfassen alle Stäbe mit Bezug zu diesen Stellen. Die entsprechenden standard-normalverteilten Zufallsvariablen Y_1, Y_2 werden durch Gl. (20) bestimmt. Entsprechend Gl. (21) besteht zwischen den gemeinsamen Verteilungsdichten der Zusammenhang

$$f(z_1, z_2, \sigma_{z_1 z_2}) dz_1 dz_2 = \phi(y_1, y_2, \sigma_{y_1 y_2}) dy_1 dy_2 \quad (22)$$

wobei die Abhängigkeit von den Kovarianzen, siehe Gl. (7), explizit dargestellt ist. Die Kovarianz $\sigma_{z_1 z_2}$ sei entsprechend der Form Gl. (8) als bekannt vorausgesetzt. Dazu soll die transformierte Kovarianz $\sigma_{y_1 y_2}$ bestimmt werden. Aus Gl. (7) ergibt sich

$$\sigma_{z_1 z_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (z_1 - \mu_z)(z_2 - \mu_z) f(z_1, z_2, \sigma_{z_1 z_2}) dz_1 dz_2. \quad (23)$$

Hierin werden die Gln. (20), (22) verwendet. Man erhält die Kovarianz

$$\sigma_{z_1 z_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F^{-1}(\Phi(y_1)) - \mu_z)(F^{-1}(\Phi(y_2)) - \mu_z) \phi(y_1, y_2, \sigma_{y_1 y_2}) dy_1 dy_2 \quad (24)$$

bzw. die Korrelation

$$\rho_{z_1 z_2} = \frac{1}{\sigma_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F^{-1}(\Phi(y_1)) - \mu_z)(F^{-1}(\Phi(y_2)) - \mu_z) \phi(y_1, y_2, \sigma_{y_1 y_2}) dy_1 dy_2 \quad (25)$$

auch Nataf-Transformation genannt. Darin sind die Funktionen Φ, F^{-1} bekannt. Es bleibt die gemeinsame Verteilungsdichte $\phi(y_1, y_2, \sigma_{y_1 y_2})$ festzulegen. Da Y_1, Y_2 jeweils standard-normalverteilt sind, gilt

$$\phi(y_1, y_2, \sigma_{y_1 y_2}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\sigma_{y_1 y_2}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\sigma_{y_1 y_2}^2)}(y_1^2 - 2\sigma_{y_1 y_2} y_1 y_2 + y_2^2)} \quad (26)$$

mit der bivariaten Standardnormalverteilung. Die Gln. (24), (26) liefern unter Berücksichtigung von Gl. (8) eine Integralgleichung mit der Kovarianz $\sigma_{y_1 y_2}$ als

Unbekannter. Zu den Lösungsverfahren siehe Liu und Der Kiureghian (1986). In den gebräuchlichen Fällen ist mit guter Näherung eine Darstellung

$$\sigma_{y_1 y_2} = \Psi \sigma_{z_1 z_2} \quad (27)$$

möglich, wobei die Werte Ψ in Abhängigkeit vom Verteilungstyp und vom Variationskoeffizienten von Z tabelliert sind, siehe Liu und Der Kiureghian (1986).

Damit ergibt sich abschließend folgender Weg zur Synthese eines nicht-normalverteilten Zufallsfeldes. Die erforderlichen statistischen Kennwerte von Z sind bekannt. Mit Gl. (27) wird die Kovarianz des äquivalenten standard-normalverteilten Zufallsfeldes ermittelt. Zugehörig ist die Kovarianzmatrix Σ . Damit ist wie vorher beschrieben das Eigenwertproblem zu lösen. Mit den Eigenformen liefert Gl. (19) eine Stichprobe $y(x_i)$ des Zufallsfeldes, wobei die Anwendung dieser Gleichung vereinfacht ist, da hier der Mittelwert von Y Null und die Standardabweichung 1 ist. Schließlich sind die Werte $y(x_i)$ noch mit Gl. (20) zu transformieren um das endgültige $z(x_i)$ zu erhalten.

5 Referenzbeispiel zur Stochastik von Rissbreiten

Das Beispiel einer Stichprobe im Rahmen einer Monte-Carlo-Analyse wurde bereits im Abschnitt 2 dargestellt. Entsprechend den vorhergehenden Überlegungen erfordert die Synthese von Stichproben eines eindimensionalen Zufallsfeldes zunächst die einmalige Eigenwertanalyse einer $N \times N$ -dimensionalen Matrix entsprechend Abschnitt 4, hierzu liegen bewährte Lösungsalgorithmen vor. Die Formulierung des Eigenwertproblems verwendet die stochastischen Parameter entsprechend der Tabelle von Seite 3, für das Referenzbeispiel werden die Zahlenwerte des Beispiels von Abschnitt 2 übernommen. Weiter wird zunächst angenommen, dass als Verteilungstyp des Zufallsfeldes der Betonzugfestigkeit eine Normalverteilung gegeben ist. Schließlich soll die Diskretisierung des Zufallsfeldes der Diskretisierung des FE-Modells entsprechen. Also ist hier $N = 300$, siehe Abschnitt 3. Mit diesen Eingangsparametern zeigt sich, dass mit 49 Eigenformen 99,9 % der gesamten Eigenwertsumme abgedeckt werden. Damit wird $m = 49$ gewählt. Diese Anzahl variiert in Abhängigkeit von den Eigenschaften der Eingangsparameter, insbesondere der Korrelationslänge. Schließlich bleibt festzustellen, dass auch die Verbundfestigkeiten in den Verbundelementen entsprechend der Festigkeiten nach der Gleichung $\tau_m = 1,8 f_{ct}$, vgl. Zilch und Rogge (2002), streuen. Da die Verbundelemente von den Stabelementen abweichende Koordinaten der Integrationspunkte besitzen, werden die Werte der Verbundfestigkeit durch lineare Interpolation aus den Betonzugfestigkeiten ermittelt.

Die Synthese einer Stichprobe erfordert mit Gl. (19) einen m -dimensionalen Zufallsvektor mit normalverteilten, stochastisch unabhängigen Komponenten. Für die Monte-Carlo-Analyse ist weiterhin eine ausreichend große Anzahl N_{MC} von Stichproben gesamter Stäbe zu untersuchen, die gegenseitig stochastisch unabhängig sind. Weitergehende Überlegungen zeigen, dass sich mit $N_{MC} \geq 1000$ nur eine geringe Streubreite der berechneten statistischen Kennwerte ergibt. Für alle folgenden Beispiele wurde $N_{MC} = 2000$ gewählt. Damit ist insgesamt ein $N_{MC} \cdot m$ -dimensionaler Zufallsvektor erforderlich. Dieser lässt sich mit einem Zufallszahlengenerator erzeugen. Darauf aufbauend wird programmgesteuert eine

Anzahl von N_{MC} Eingabedatensätzen des FE-Modells erstellt, berechnet und ausgewertet. Es liegt ein sogenanntes Berechnungslos vor. Die Bearbeitung eines solchen Berechnungsloses erfordert derzeit für $N_{MC} = 1000$ auf einem PC-Cluster mit 100 Knoten eine Rechenzeit von etwa $\frac{1}{2}$ h.

Im Rahmen der Auswertung ist zunächst die Synthese der Zufallsfelder zu kontrollieren. Abbildung 6a zeigt das Histogramm der Zugfestigkeiten des Referenzloses. Zugrunde liegen $N_{MC} \cdot N$ bzw. 300 000 Werte. Der angestrebte Mittelwert von 3,5 wird mit einer Abweichung von 10^{-8} erreicht, die angestrebte Standardabweichung von 0,7 mit einer Abweichung von 10^{-3} . Unterlegt ist der theoretische Verlauf der Normalverteilung mit den angestrebten Parametern. Es zeigt sich, dass die Abweichungen unwesentlich sind. Weiterhin soll die Kovarianz nach Gl. (7) betrachtet werden. Abbildung 6b stellt exemplarisch für die Stelle $x_1 = 0,5$ die Kovarianz der Zugfestigkeiten des Referenzloses dar, wobei die Stelle x_2 als Variable dient. Der vorgegebene Verlauf nach Gl. (8) ist wiederum unterlegt. Die geringen welligen Abweichungen in den seitlichen Bereichen ergeben sich aus der Beschränkung der Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte. Ansonsten sind die Abweichungen wiederum unwesentlich.

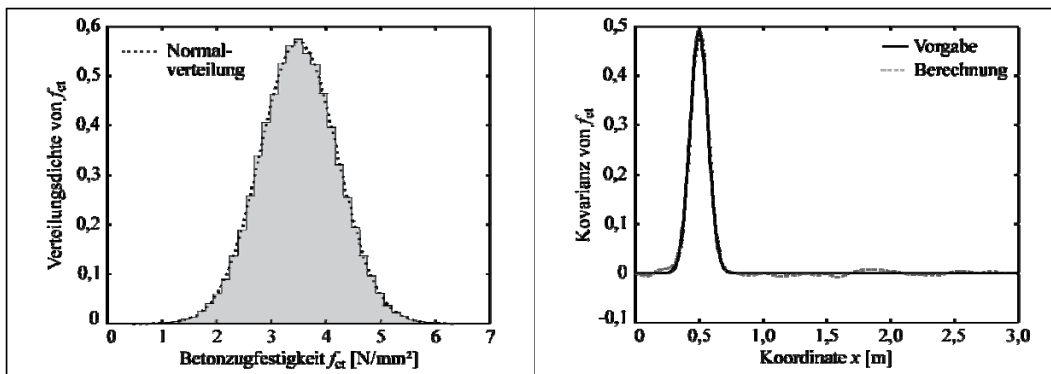


Abbildung 6: Betonzugfestigkeit a) Histogramm b) Räumliche Kovarianz.

Im Weiteren wird die berechnete Rissbildung des Referenzloses betrachtet. In jedem Datensatz eines Berechnungsloses erfolgt die Belastung weggesteuert durch inkrementelle Vorgabe der Verschiebung des rechten Bewehrungsknotens. So wird in jedem Datensatz das Spektrum der Rissbildung von der Erstriss- bzw. Einzelrissbildung bis hin zur abgeschlossenen Rissbildung mit der gesamten Bandbreite der Bewehrungsspannungen von Null bis zum Erreichen der Fließgrenze durchlaufen. Dabei wird die Entstehung jedes einzelnen Risses nachvollzogen und für jeden Riss die Entwicklung der Rissbreite in Abhängigkeit von der Bewehrungsspannung. Exemplarisch wird ein Intervall mit Bewehrungsspannungen von 340–360 MN/m² betrachtet. Abbildung 7a zeigt das Histogramm der berechneten Rissbreiten für dieses Spannungsintervall. Zugrunde liegen pro Datensatz ca. 11 Risse und insgesamt ca. 11 000 Risse für das gesamte Berechnungslos. Der berechnete Mittelwert der Rissbreite beträgt 0,33 mm, die berechnete Standardabweichung 0,053 mm. Unterlegt sind eine Normalverteilung und eine Lognormalverteilung mit denselben Parametern. Es zeigt sich eine geringfügig bessere Übereinstimmung zur Lognormalverteilung. Dies gilt mehr oder

weniger ausgeprägt auch für alle anderen Bewehrungsspannungsintervalle des Referenzloses.

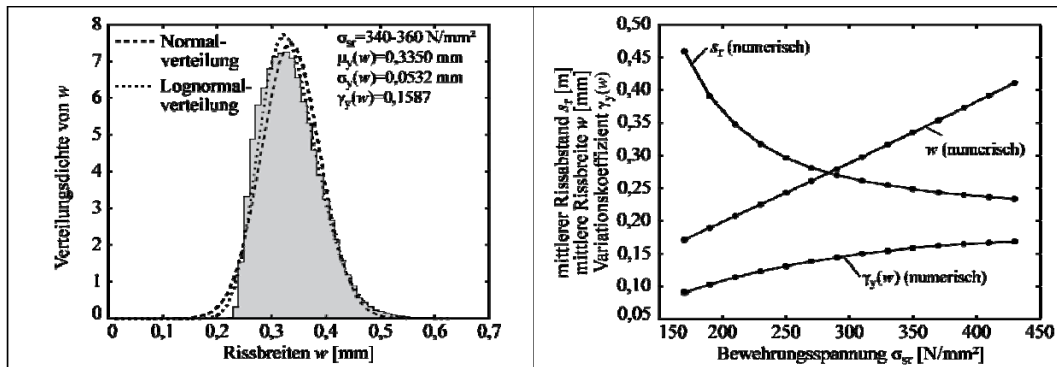


Abbildung 7: a) Histogramm Rissbreiten b) Zusammenfassung Rissbreiten.

Abbildung 7b zeigt die Zusammenfassung der Rissbreitenergebnisse, indem der Mittelwert der berechneten Rissbreite, der mittlere Rissabstand und der Variationskoeffizient der Rissbreite, vgl. Gl. (4), in Abhängigkeit von der Bewehrungsspannung dargestellt sind. Wie auch plausibel ist, zeigt sich die Abnahme der Rissabstände und die Zunahme der Rissbreiten mit der Zunahme der Bewehrungsspannung. Es zeigt sich auch die Zunahme des Variationskoeffizienten mit zunehmender Bewehrungsspannung, d.h. die relative Streuung nimmt zu.

6 Parametervariationen zur Stochastik von Rissbreiten

Als Verteilungstyp der Betonzugfestigkeiten wurde bisher die Normalverteilung angenommen. Damit besteht die Möglichkeit, dass sich für die Zugfestigkeit Stichproben kleiner Null ergeben. Mit dem Mittelwert und der Standardabweichung nach der Tabelle Seite 3 liegt die Wahrscheinlichkeit hierfür bei $0,3 \cdot 10^{-6}$. Um diesen Fall sicher auszuschließen können z.B. die Lognormalverteilung oder auch die Weibullverteilung gewählt werden. Es werden also weitere Berechnungen mit der Lognormalverteilung und der Weibullverteilung als Verteilungstyp der Betonzugfestigkeit betrachtet, ansonsten bleiben alle Parameter gegenüber dem Referenzlos unverändert. Abbildung 8a zeigt die Histogramme der Zugfestigkeiten dieser Berechnungen, wobei der Verläufe der entsprechenden Verteilungsdichten unterlegt sind. Vergleicht man die Histogramme der Zugfestigkeit in den Abbildungen 6a und 8a, so wird deutlich, dass die Lognormalverteilung eine Schiefe nach links hat, die Normalverteilung symmetrisch ist und die Weibullverteilung eine Schiefe nach rechts hat. Die Kovarianz der Zugfestigkeiten entspricht in allen Fällen Bild 6b. Abbildung 8b zeigt die Histogramme der berechneten Rissbreiten für die verschiedenen Typen der Zugfestigkeitsverteilung wiederum im Bewehrungsspannungsintervall 340–360 MN/m² und Abbildung 9 schließlich die Zusammenfassung der Rissbreitenergebnisse. Insgesamt ergibt sich, dass der angenommene Verteilungstyp der Zugfestigkeiten nur geringe Auswirkungen auf die berechneten Rissbreiten und ihre statistischen Kennwerte hat.

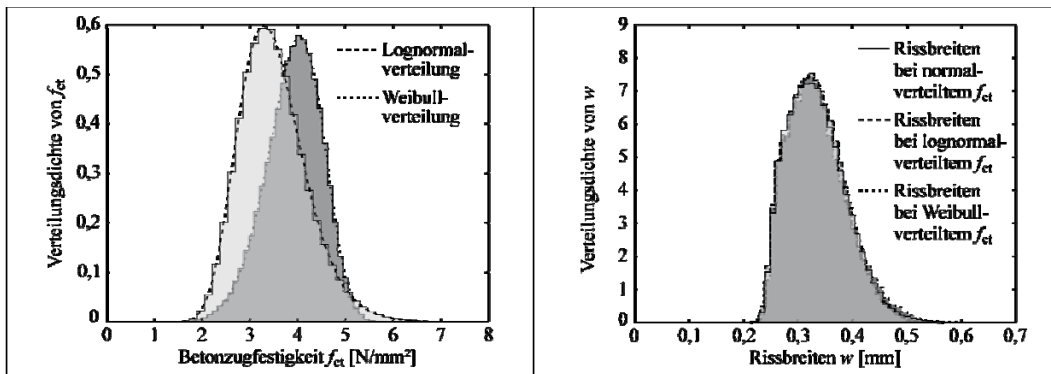


Abbildung 8: a) Betonzugfestigkeiten (Lognormal, Weibull) b) Rissbreiten.

Neben dem Verteilungstyp der Betonzugfestigkeiten besteht insbesondere die Korrelationslänge L_y , vgl. Gl. (8), als unsichere statistische Kenngröße. Deshalb wird der Einfluss der Korrelationslänge auf die stochastischen Eigenschaften der Rissbreiten betrachtet. Als Verteilungstyp der Betonzugfestigkeit wird die Normalverteilung gewählt. Abgesehen von L_y werden alle Parameter der Tabelle von Seite 3 übernommen. Die Korrelationslänge wird im Bereich 0,01 m bis 100,0 m variiert. Für den kleinen Wert ist die Betonzugfestigkeit räumlich praktisch unkorreliert, für den großen Wert ergibt sich für einen Stab räumlich nur eine sehr geringe Streuung der Betonzugfestigkeit. Abbildung 10 zeigt die berechneten Mittelwerte und Variationskoeffizienten der Rissbreiten in den Bewehrungsspannungsintervallen 300–320 MN/m², 340–360 MN/m² und 380–400 MN/m² in Abhängigkeit von der Korrelationslänge in semilogarithmischer Darstellung. Es zeigt sich ein deutlicher Einfluss der Korrelationslänge auf die Rissbreitenkennwerte und Rissverteilungen.

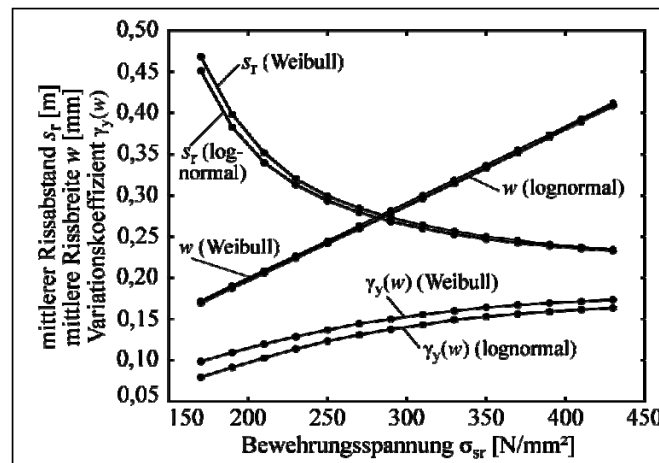


Abbildung 9: Zusammenfassung Rissbreiten bei normal-, lognormal- und Weibull-verteiltern Betonzugfestigkeiten.

Dies wird besonders deutlich, wenn einzelne Korrelationslängen herausgegriffen werden. Es wird zunächst die Korrelationslänge des Referenzfalles $L_y = 0,1$ m gewählt. Abbildung 11a zeigt exemplarisch für eine einzelne Realisierung die Zugfestigkeit entlang des Stabes und die berechneten Verläufe der Betonzugspannungen kurz vor Erreichen der Fließgrenze der Bewehrung, also im Zustand der

abgeschlossenen Rissbildung. Die Nullwerte der Betonzugspannungen geben wiederum die Lage von Rissen an. In Abbildung 7a wurde für diesen Fall bereits die Verteilung der Rissbreiten im Bewehrungsspannungsintervall 340–360 MN/m² dargestellt, wobei sich zunächst eine gute Übereinstimmung mit der Lognormalverteilung ergab.

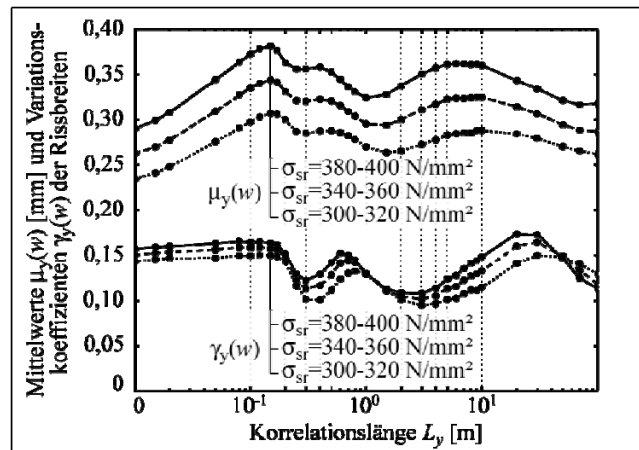


Abbildung 10: Kennwerte Rissbreiten abhängig von Korrelationslängen.

Entsprechende exemplarische Darstellungen der Betonfestigkeits- und Zugspannungsverteilung sind mit den Abbildungen 11b-d für Korrelationslängen von $L_y = 1$ m, $L_y = 10$ m und $L_y = 100$ m gegeben. Zudem ist in Abbildung 12 die Verteilung der Rissbreiten für die drei Korrelationslängen im Bewehrungsspannungsintervall 340–360 MN/m² zu sehen. Die exemplarisch herausgegriffenen Verläufe der Betonzugspannungen und damit der Rissbilder zeigen im Einzelfall determinierte Muster, die sich aus dem Wechselspiel von vorgegebenem Zugfestigkeitsverlauf und – mit zunehmender Rissbildung – abnehmender räumlicher Bereiche potentieller neuer Risse ergeben. Insgesamt ergeben sich mit der Variation der Korrelationslänge große Variationen in den Verteilungstypen der Rissbreiten, die teilweise auch ausgeprägt bimodal sind. Vergleicht man weiterhin die Korrelationslängen von $L_y = 10$ m und $L_y = 100$ m, so sind praktisch keine Unterschiede in den Zugfestigkeitsverläufen erkennbar. Trotzdem ergeben sich erhebliche Unterschiede in den Kennwerten und Verläufen der Rissbreiten. Dies ist in allen wiederholten Berechnungen der entsprechenden Berechnungslose oder auch mit der Vergrößerung der Stichprobenanzahl N_{MC} reproduzierbar. Die Ergebnisse sind hier in dem Sinne chaotisch, dass geringe Variationen in den Eingangswerten zu großen Veränderungen in den Ergebnissen führen, ohne dass sich eine einheitliche Ergebnistendenz ergibt.

Offensichtlich spielen für die Rissbildung aber auch die Art und die geometrischen Abmessungen des Bauteils eine Rolle. Deshalb werden im Vergleich zum Referenzlos andere Bauteillängen betrachtet und es wird wiederum die Korrelationslänge variiert. Abbildung 13 zeigt für drei Stablängen (0,4 m, 1 m und 3 m) die berechneten Mittelwerte und Variationskoeffizienten der Rissbreiten wiederum im Bewehrungsspannungsintervall 340 – 360 MN/m².

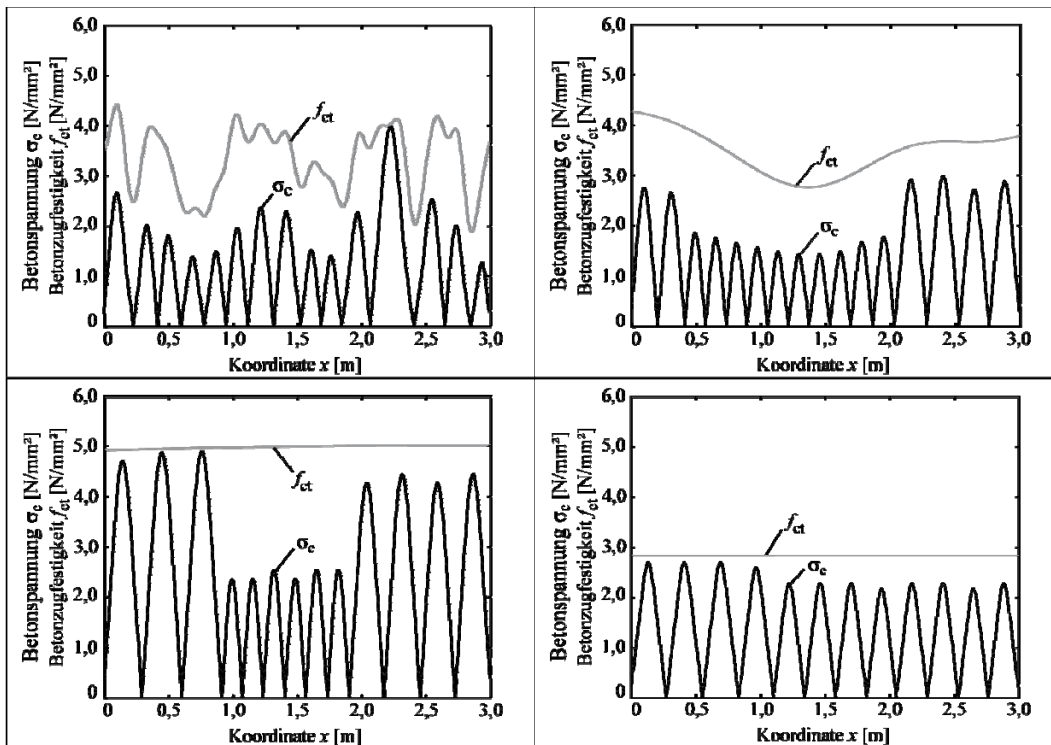


Abbildung 11: Exemplarische Betonzugfestigkeits- und Betonspannungsverteilung bei abgeschlossener Rissbildung für verschiedenen Korrelationslängen
a) 0,1 m b) 1,0 m c) 10 m d) 100 m.

Anzumerken ist zunächst, dass sich für kurze Stablängen wegen der in allen Fällen statistisch gleichen Lasteintragungslängen L_t eine geringere Anzahl von Rissen ergeben und weiterhin nur kurze räumliche Bereiche für die zufällige Rissbildung zur Verfügung stehen. Dessen ungeachtet ergeben sich in allen Fällen bei sehr kurzen Korrelationslängen ähnliche statistische Kennwerte bezüglich Mittelwert und Variationskoeffizient. Bei größeren Korrelationslängen zeigt sich dann ein Skaleneffekt, d.h. die Bauteillänge hat bei ansonsten gleichen Parametern einen erheblichen Einfluss auf die statistischen Risskennwerte.

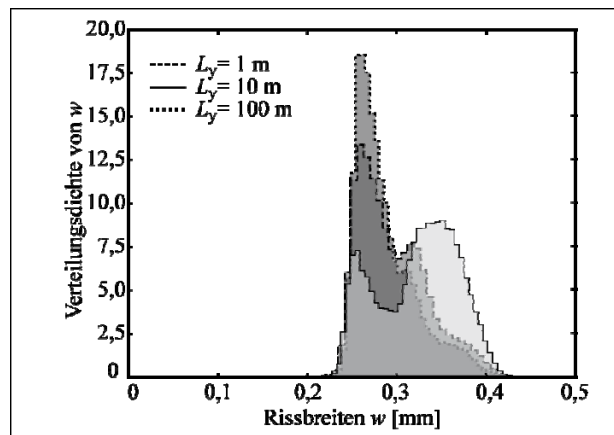


Abbildung 12: Histogramm Rissbreiten bei unterschiedlichen Korrelationslängen.

Aussagen, die unabhängig von der Bauteillänge sind, erscheinen nur dann möglich, wenn die Korrelationslänge in der Größenordnung von wenigen Zentimetern liegt oder wenn bei längeren Korrelationslängen – also bei weitgehend räumlich konstanten Betonfestigkeiten innerhalb eines Bauteiles – davon ausgegangen werden kann, dass aufgrund von System und veränderlicher Belastung ein Riss nur in einem räumlichen eng begrenzten Bereich auftreten kann. Dies wird hier durch den Fall der kurzen Stablänge $L_{\text{Stab}} = 0,4$ m repräsentiert. Insgesamt ist nach derzeitigem Stand der Untersuchungen festzuhalten, dass Wahrscheinlichkeitsaussagen zu Rissbreitenverteilungen von Stahlbetonzugstäben i.d.R. solange nicht möglich sind, wie beispielsweise keine gesicherten Erkenntnisse zur Korrelationslänge von Zugfestigkeitsverteilungen vorliegen. Darüber hinaus bestehen Skaleneffekte, d.h. neben der Art, Größe und räumlichen Ausdehnung einer Beanspruchung hat auch die Bauteilgröße einen Einfluss auf Rissbreitenverteilungen.

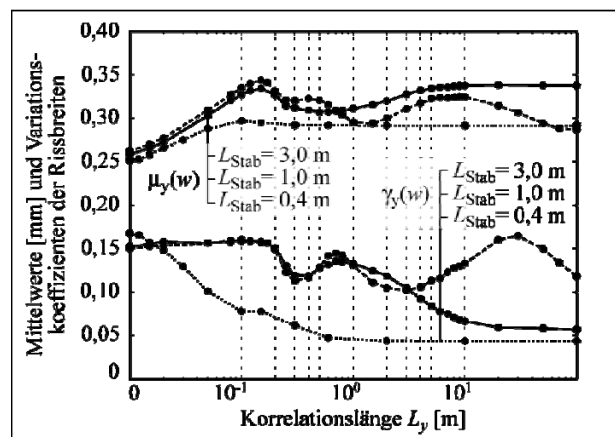


Abbildung 13: Kennwerte Rissbreiten abhängig von Korrelationslängen für verschiedene Stablängen.

7 Ausblick

Der Beitrag betrachtet zunächst nur den Einfluss streuender Betonzugfestigkeiten, wobei die Verbundfestigkeit in direkter Abhängigkeit von der Zugfestigkeit bestimmt wird. Grundsätzlich sind hinsichtlich des Betons neben der Zugfestigkeit, der Elastizitätsmodul, die Verbundfestigkeit und die Parameter der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung als stochastische Felder zu betrachten, die untereinander korrelieren. Das beschriebene stochastische Simulationsmodell lässt sich so erweitern, dass auch diese und ggf. andere stochastische Felder einbezogen werden können. Als weitere Parameter mit großem Einfluss auf das Rissverhalten sind der Bewehrungsgehalt und der Durchmesser der Bewehrungsstäbe zu nennen. Unter Berücksichtigung ihrer jeweiligen stochastischen Eigenschaften ergeben sich eine Vielzahl von Einflussparametern und der Rechenaufwand und der Umfang von Ergebnisdaten ist immens. Damit ergeben sich auch erhebliche Anforderungen an eine automatisierte Vorbereitung, Kontrolle und Nachbereitung der rechnerischen Studien. Hierfür kann mit großem Nutzen das Programmsystem OPTISLANG verwendet werden.

Literatur

- CEB-FIP: Constitutive modelling of high strength / high performance concrete. International Federation for Structural Concrete, bulletin 42. Lausanne 2008.
- DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton – Teil 1: Bemessung und Konstruktion. August 2008.
- DIN EN 12390: Prüfung von Festbeton Teil 5: Biegezugfestigkeit von Probekörpern. Mai 2006.
- DIN EN 12390: Prüfung von Festbeton Teil 6: Spaltzugfestigkeit von Probekörpern. Mai 2006.
- ECKFELDT, L., LINDORF, A., LEMNITZER, L., HAMDAM, A., CURBACH, M.: Verbesserung der Vorhersage von kleinen Rissbreiten. *Schlussbericht des Forschungsvorhabens im Auftrag des DIBt*. Institut für Massivbau, TU Dresden, 2009.
- LIU, P.L., DER KIUREGHIAN, A.: Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 1 (1986), S. 105 – 112.
- MATTHIES, H., STRANG, G.: The solution of non-linear finite element equations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), S. 1613 – 1626.
- SPANOS, P.D., ZELDIN, B.A.: Monte Carlo treatment of random fields: A broad perspective. In: *App. Mech. Rev.* 51 (1998), S. 219 – 237.
- VOŘECHOVSKÝ, M.: Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods. In: *Structural Safety* 30 (2008), S. 337 – 363.
- ZILCH, K., ROGGE, A.: Bemessung der Stahlbeton- und Spannbetonbauwerke nach DIN 1045. In: *Betonkalender 2002, Band 1*. Berlin: Ernst & Sohn, 2002.