

# Design for Six Sigma und Robust Design

S. Reh<sup>1\*</sup>, J.-D. Beley<sup>2</sup>, S. Mukherjee<sup>2</sup>, E. H. Khor<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

<sup>2</sup> ANSYS Inc, Canonsburg, PA USA

## Zusammenfassung

Angetrieben von zunehmender Konkurrenz finden sich die Hersteller komplexer und anspruchsvoller Produkte immer mehr unter Druck ihre Produkte unter sich offensichtlich widersprechender technischer und finanzieller Ziele zu optimieren. Diese Herausforderung wird noch gesteigert durch die Tatsache, dass diese Optimierung unter dem Einfluss von Unsicherheiten und Streuungen vorzunehmen ist, denen technische Produkte hinsichtlich der Herstellungstoleranzen, Materialeigenschaften und Betriebsbedingungen ausgesetzt sind. Folglich kann ein solches Optimierungsproblem auch nur mit stochastischen Methoden geleistet werden, mit denen solche Unsicherheiten und Streuungen abgebildet werden können. Dieser Beitrag leitet in die verschiedenen Ansätze ein, die man in dieser Situation zur Optimierung der Robustheit und Zuverlässigkeit verwenden kann. Die erforderlichen mathematischen Methoden werden erläutert. Zwei industrielle Anwendungsbeispiele zeigen auf, wie die entsprechenden Problem gelöst welche Ergebnisse zur Verfügung stehen. Das Anwendungsbeispiel wurde mit dem DesignXplorer 9.0 gerechnet.

**Keywords:** Robust Design, Design for Six Sigma, Zuverlässigkeit, Reliability-based Optimization

---

\* Kontakt: Prof. Dr.-Ing. Stefan Reh, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, Berliner Tor 21, D- 20099 Hamburg, E-Mail: [reh@rzbt.haw-hamburg.de](mailto:reh@rzbt.haw-hamburg.de)

# 1 Einleitung

Seit einigen Jahren haben Methoden und Werkzeuge zur Berechnung und Optimierung der Robustheit, Qualität und Zuverlässigkeit technischer Produkte ein wachsendes Interesse sowohl in der Industrie als auch im akademischen Umfeld erfahren. Industrielle Hersteller komplexer Produkte unterliegen einem immer stärkeren Zwang gleichzeitig die Kosten zu reduzieren (Herstellungskosten, Garantiekosten etc.), die Entwicklungszeiten zu verkürzen, und die Produktqualität und –zuverlässigkeit zu erhöhen. Folglich müssen in der Entwicklung von Produkten sich einander widersprechende technische und finanzielle Ziele unter einen Hut gebracht werden und die Produkte möglichst in Richtung der Erfüllung aller dieser Ziele optimiert werden. Optimierung ist allerdings nur möglich, wenn sich die Zielfunktionen als auch die Zwangsbedingungen, die bei der Optimierung einzuhalten sind, quantifizieren lassen. Um einen ausgewogenen Kompromiss zwischen widerstrebenden Zielen unter dem Einfluss von Unsicherheiten finden zu können, müssen außerdem stochastische Methoden eingesetzt werden. In diesem Zusammenhang sind folgende Methoden und Begriffe relevant:

**Deterministische Analyse** Eine deterministische Analyse stellt eine Transformationsfunktion dar, die den Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen, die das Produktverhalten beeinflussen, und den Ergebnisparametern, die das Produktverhalten charakterisieren, beschreiben. In einfacheren Fällen kann eine deterministische Analyse durch eine analytische Funktion beschrieben werden. In eher realistischen Fällen ist der Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen und den Ergebnisgrößen aber algorithmisch gegeben, z.B. durch eine Finite-Elemente-Analyse.

**Unsicherheitsanalyse** Wenn die Eingangsgrößen einer Analyse mit Streuungen behaftet sind, dann wird durch eine Unsicherheitsanalyse ermittelt in welchem Maße die Ergebnisgrößen von diesen Streuungen beeinflusst werden und damit selbst Zufallsgrößen werden.

**Zuverlässigkeitsanalyse** Um die Zuverlässigkeit eines Produktes zu quantifizieren, ist es sinnvoll die sog. Ausfallwahrscheinlichkeit zu berechnen, die mit  $P_f$  gekennzeichnet wird. Darunter versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt bestimmte Designkriterien nicht erfüllt. Dieses „Nichterfüllen“ von Designkriterien muss aber nicht notwendigerweise mit dem physischen Ausfall (Defekt, Ende der Lebensdauer, nicht mehr funktionieren, ...) eines Produktes einhergehen. Die Zuverlässigkeit  $P_S$  eines Produktes ist dann definiert als die Wahrscheinlichkeit, dass es sich konform zu den Designkriterien verhält, d.h. nicht ausfällt, d.h. es gilt  $P_S = 1 - P_f$ .

**Zuverlässigkeitsbasierte Optimierung** Wie der Name bereits andeutet wird bei einer zuverlässigkeitsbasierten Optimierung versucht die Zuverlässigkeit eines Produktes bzw. die entsprechende Ausfallwahrscheinlichkeit zu optimieren. Es muss in diesem Zusammenhang berücksichtigt werden, dass eine Verbesserung der Zuverlässigkeit oft mit anderen technischen und finanziellen Zielen in

Konflikt steht. Folglich sollte der Optimierungsprozess eine ausgewogene und quantifizierbare Balance zwischen allen Zielen anstreben.

**Robust Design** Technische Produkte werden immer komplexer und folglich immer anfälliger für die Auswirkung von Unsicherheiten und Streuungen, wie Formica (1990) feststellt. Bei Robust Design wird versucht ein Produkt so zu optimieren, dass es weniger sensitiv gegen unvermeidbare Streuungen von Eingangsgrößen ist, wobei die Variabilität des Produktverhaltens verringert wird und das Produktverhalten somit besser „vorhersagbar“ wird. Dies zu erreichen ist ein Optimierungsproblem, bei dem die Ergebnisse einer probabilistischen Analyse als Zielfunktionen und/oder Zwangsbedingungen verwendet werden. Als Maß für die Robustheit (bzw. der Mangel an Robustheit) werden dabei stochastische Größen wie zum Beispiel die Standardabweichung, der Variationskoeffizient, der Exzeß, Signal-to-Noise-Ratios (siehe z.B. Taguchi und Konishi (1993)), Shannon's Entropie (siehe Shannon (1948)) oder die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Ergebnisparameters verwendet. Es sollte einschränkend nicht verschwiegen werden, dass die Verwendung der Signal-to-Noise-Ratios zwar ein gewisse Popularität genießen, Montgomery (1991) und Parks (2001) haben diese Robustheitsmaße allerdings untersucht und negativ beurteilt, weshalb von deren Verwendung eher abzuraten ist. Die Details sind in den genannten Publikationen zu ersehen.

**Design for Six Sigma** Der Ausdruck „Six Sigma“ wurde zuerst von Motorola eingeführt, wie bei Harry und Lawson (1992) erläutert. „Six Sigma“ Qualität wird dabei definiert als ein Design, bei dem nur 3.4 aus einer Million Produkte ausfallen. In der Ingenieurspraxis wird Design for Six Sigma entweder im Sinne von Robust Design oder im Sinne einer zuverlässigkeitsbasierten Optimierung angewendet.

**Multikriterien-Optimierung** Wie bereits mehrfach angedeutet strebt man bei der Verbesserung eines Designs in der Regel die Erreichung oder Verbesserung mehrerer Ziele an. Je mehr Ziele in einem Design verwirklicht werden sollen, desto wahrscheinlicher ist es, dass einige davon in einem Konflikt zueinander stehen. D.h. dass die Verbesserung einer Zielfunktion nur auf Kosten einer oder mehrerer anderer zu erreichen ist.

**Trade-Off Studien** Eine Trade-Off Studie ist eine Art das Ergebnis einer Multikriterien-Optimierung bei Vorliegen von Konflikten unter den Zielfunktionen mit Hilfe der Pareto-Front zu visualisieren.

Dieser Beitrag beschreibt einige Methoden zur Behandlung des oben beschriebenen Problems als auch die bei der Anwendung zu beachtenden Limitierungen. Wichtig ist in diesem Zusammenhang immer die Erkenntnis, dass es bei Vorliegen von Unsicherheiten und Streuungen nicht mehr möglich ist, das Produktverhalten exakt vorherzusagen, sondern es können darüber nur noch Schätzungen angegeben werden. Deshalb muss eine solche Schätzung immer begleitet werden von Angaben, wie genau diese Schätzung denn ist. Das in diesem Beitrag gezeigte Beispiel wurde mit dem DesignXplorer 9.0 gerechnet.

## 2 Probabilistische Methoden

### 2.1 Monte Carlo Simulationsverfahren

#### 2.1.1 Vorgehensweise

Der Hintergrund von Monte Carlo Simulationsverfahren ist ausgiebig in der einschlägigen Fachliteratur dokumentiert und es sei hier nur z.B. auf das Buch von Ang und Tang (1984) verwiesen. Eine Kernkomponente des Monte Carlo Verfahrens ist ein Zufallszahlengenerator. Dabei ist es üblich zuerst gleichverteilte Zufallszahlen von 0 bis 1 zu generieren und diese dann mit Hilfe der inversen Verteilungsfunktion in Zufallszahlen mit beliebiger Verteilung zu transformieren. Ein typisches Problem früherer Zufallszahlengeneratoren war die begrenzte Wiederholungsperiode. Das von Mastumoto und Nishimura (1998) veröffentlichte Verfahren hat jedoch eine Wiederholungsperiode von  $2^{19937} - 1 = 4.3 \cdot 10^{6001}$ , die bei realen ingenieurstechnischen Problemen praktisch nicht mehr überschritten werden kann.

Es sollte noch erwähnt werden, dass auch eine möglicherweise bestehende Korrelation unter den Eingangsgrößen berücksichtigt werden kann, wie Florian (1992) erläuterte. Um den Simulationsprozess effizienter zu gestalten und sicher zu stellen, dass auch die Ausläufer der Verteilungen angemessen durch Simulationspunkte belegt sind, ist es empfehlenswert das so genannte Latin-Hypercube Verfahren anzuwenden. Details dazu sind bei Florian (1992) und Ayyub und Lai (1989) beschrieben. Nach der Generierung von Zufallszahlen, die den Verteilung der einzelnen Eingangsgrößen folgen, werden die Simulationen mit den gewonnenen Zufallszahlen durchgeführt und die Zahlenwerte für die Ergebnisgrößen ausgewertet, wie im folgenden erläutert.

#### 2.1.2 Auswertung der Ergebnisse

Die Interpretation der Ergebnisse einer Monte Carlo Analyse basiert immer auf einer statistischen Auswertung. Die Verfahren zur Bestimmung von statistischen Größen wie z.B. Mittelwert, Standardabweichung und deren Konfidenzintervalle als auch von Visualisierungsmöglichkeiten wie z.B. Histogrammen sind ausgiebig in einschlägigen Textbüchern zu entnehmen. Um die kumulative Verteilungsfunktion zu erhalten, werden die Ergebnisdaten in aufsteigender Reihenfolge sortiert. Der Wert der kumulativen Verteilungsfunktion  $F_i$  am  $i$ -ten Datenpunkt ergibt sich aus der Gleichung

$$\sum_{k=i}^N \frac{N!}{(N-k)!k!} F_i^k (1-F_i)^{N-k} = 50\%. \quad (1)$$

Diese Beziehung muss nach  $F_i$  aufgelöst werden, wofür Kececioglu (1991) numerische Lösungen angegeben hat. Konfidenzintervalle für die Werte der kumulativen Verteilungsfunktion können aus einer ganz ähnlichen Beziehung abgeleitet werden, in dem auf der rechten Seite von Gleichung (1) anstatt des

50%-Wertes die Wahrscheinlichkeitsniveaus der Ober- und Untergrenze der Konfidenzintervalle verwendet werden. Über die Konfidenzintervalle lassen sich direkt Angaben über die Genauigkeit der gewonnenen Ergebnisse erzielen.

Auch Sensitivitäten können mit den Ergebnissen einer Monte Carlo Simulation ermittelt werden. Hierzu kann man z. B. die Korrelationskoeffizienten verwendet. In diesem Sinne ist eine Ergebnisgröße umso sensitiver gegenüber einer Eingangsgröße, je größer der Betrag des Korrelationskoeffizienten zwischen der Ergebnisgröße und der Eingangsgröße ist. Details darüber finden sich zum Beispiel bei Ang und Tang (1975).

## 2.2 Klassische Antwortflächenverfahren

Es ist allgemein bekannt, dass das Monte Carlo Simulationsverfahren numerisch sehr aufwendig ist, d.h. besonders zur Ermittlung kleiner Ausfallwahrscheinlichkeiten ist eine unpraktikabel große Anzahl an Simulationen erforderlich. Das Antwortflächenverfahren ist eine Möglichkeit das wahre, durch eine Finite-Elemente-Analyse gegebene, Antwortverhalten durch eine so genannte Metafunktion zu approximieren und zu ersetzen. Im Rahmen der klassischen Regressionsanalyse werden dabei meist quadratische Approximierungsfunktionen verwendet in der Form

$$\hat{y} = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j. \quad (2)$$

Dabei sind  $c_0$ ,  $c_i$  und  $c_{ij}$  die Regressionskoeffizienten, mit  $i, j=1, \dots, n$  und  $n$  ist die Anzahl der Eingangsparameter.

Das klassische Antwortflächenverfahren setzt sich dabei aus 2 Teilen zusammen. Der erste Teil ist die Ermittlung und Positionierung der Stützpunkte. Das Ziel dieses ersten Teils ist eine möglichst geringe Anzahl an Stützpunkten in einem mehrdimensionalen Raum optimal so anzuordnen, dass die damit gewonnene Metafunktion möglichst genau ist. Dieser erste Teil wird auch „Design of Experiments“ oder „experimentelle Versuchsplanung“ genannt. Sind an allen Stützpunkten die Ergebniswerte gemäß Finite-Elemente-Analyse ermittelt worden, dann folgt der zweite Schritt, die Regressionsanalyse, die das Ermitteln der Regressionsparameter zum Ziel hat. Beide Schritte sollen im folgenden kurz erläutert werden.

### 2.2.1 Design of Experiments

Wie bereits erwähnt, verfolgen die verschiedenen in der Literatur dokumentierten Design of Experiment Strategien das Ziel die erforderliche Anzahl an Stützpunkten gering zu halten und diese Stützpunkte optimal im Raum der Eingangsgrößen anzuordnen, um eine möglichst genaue Bestimmung der Regressionskoeffizienten in Gleichung (2) zu erreichen. Häufig werden zwei Verfahren angewendet, und zwar das nach Box und Behnken (1960) benannte Verfahren sowie das so genannte Central Composite Design, wie es z.B. bei

Montgomery (1991) dokumentiert ist. Craney (2002) hat die beiden Verfahren eingehend hinsichtlich verschiedener Kriterien miteinander verglichen und dabei das Central Composite Design als das flexiblere und bessere Verfahren identifiziert.

Es ist nicht Gegenstand dieses Beitrages auf die Details von Regressionsanalyseverfahren einzugehen, die ausreichend in der Literatur dokumentiert sind (siehe Craney (2002) und Montgomery (1991)). Es soll jedoch betont werden, dass die rein quadratische Approximierungsfunktion in Gleichung (2) in den seltensten Fällen völlig ausreicht um die Eingangs-zu-Ergebnisgrößen-Relation mit guter Genauigkeit zu beschreiben. Man kann jedoch den quadratischen Ansatz mit Hilfe von Transformationsfunktionen erweitern und damit die Genauigkeit des Ansatzes drastisch steigern. Eine solche Transformationsfunktion ist zum Beispiel die Box-Cox-Transformation, die bei Box und Cox (1964) beschrieben ist.

Antwortflächenverfahren basieren notwendigerweise auf der Annahme, dass die Antwortfläche eine adequate Approximierung der wahren Beziehung zwischen den Eingangsgrößen und den Ergebnisgrößen ist. Um die Richtigkeit dieser Annahme zu verifizieren, gibt es in der Literatur eine ganze Reihe von goodness-of-fit Maßen. Diese Maße sind z.B. der Test auf Normalverteilung der Regressionsfehler, der Test für den maximalen Varianz-Vergrößerungs-Faktor, das Bestimmtheitsmaß, der p-Wert des Test auf konstante Varianz usw. um nur einige zu nennen. Details dazu sind bei Neter et al. (1996) und Craney (2002) zu finden. Craney hat zudem diese goodness-of-fit Maße für reale Ingenieursprobleme und Anwendungsfälle untersucht und Bedingungen für die Akzeptierung oder Zurückweisung einer Antwortfläche gegeben. Weitere Details zum Antwortflächenverfahren sind bei Reh et al. (2006) zu finden.

## **2.3 Variational Technology**

In diesem Abschnitt soll die Variational Technology als eine hochgenaue und effiziente Alternative zu den klassischen Antwortflächenverfahren besprochen werden. Analog wie Antwortflächen, die auf Versuchsplänen basieren, baut auch die Variational Technology auf einer Antwortfläche in der Form eines Polynoms auf. Anders als klassische Verfahren wird hier jedoch ein Taylorreihenansatz mit höheren Termen verwendet. Für diese höheren Terme des Ansatzes werden entsprechend höhere Ableitungen der Ergebnisgröße nach den Eingangsgrößen verwendet. Diese Ableitungen werden mit Hilfe eines automatischen Differenzierungsverfahrens während der Lösung des Finite-Elemente Problems berechnet. Die Variational Technology steht in dem Finite-Elemente Programm ANSYS also auch in einigen weiteren kommerziellen Modulen zur Verfügung.

### **2.3.1 Berechnung der Ableitungen höherer Ordnung**

In diesem Abschnitt soll die Berechnung höherer Ableitungen der Ergebnisgrößen einer Finite-Elemente-Analyse nach den Eingangsgrößen erläutert werden. Dabei soll nur der Fall einer linearen statischen Analyse behandelt werden. Eine Erweiterung auf nicht-lineare statische Analysen und Modalanalysen ist möglich wie in Reh et al. (2006) beschrieben.

Im folgenden soll die statische Gleichgewichtsbedingung einer diskretisierten Struktur mit der Finite-Elemente-Methode behandelt werden. Dieses Gleichgewicht ist gegeben durch

$$K(p_0)U(p_0) = F(p_0) \quad (3)$$

hierbei sind die Steifigkeitsmatrix  $K$  und der Vektor der äußeren Lasten  $F$  explizit von dem Vektor der Eingangsparameter  $p_0$  abhängig. Dieser Vektor der Eingangsparameter kann z.B. bestehen aus Geometrieparametern, Materialkenngrößen, Lasten und Randbedingungen. Die Abhängigkeit des Verschiebungsvektors  $U$  von der Eingangsparameter  $p_0$  ist jedoch implizit, d.h. der Verschiebungsvektor  $U$  ist indirekt eine Funktion der Eingangsparameter, weil die Steifigkeitsmatrix und der Lastvektor es sind. Die übliche Vorgehensweise, um den Verschiebungsvektor bei einem anderen Satz an Eingangsparameter  $p_1$  zu ermitteln, besteht darin, das Gleichungssystem (3) noch einmal zu lösen.

Bevor auf die Ableitungen eingegangen wird, soll vorausgeschickt werden, dass der Verschiebungsvektor  $U$  analytisch ist, solange die Steifigkeitsmatrix  $K$  und der Lastvektor  $F$  analytisch sind. Dies gilt auch für Fälle, in denen die Verschiebungen, z.B. bei Vorliegen von Rissen, Singularitäten aufweisen.

Die Ableitungen erster Ordnung werden häufig in Rahmen der Optimierung von Bauteilen verwendet. Haftka (1982) hat die Ableitungen zweiter Ordnung eingeführt. Die Ableitung von Gleichung (3) nach  $p$  an der Stelle  $p=p_0$  bis zu einer beliebigen Ordnung  $n$  ist gegeben durch:

$$KU^{(n)} = F^{(n)} - \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} K^{(i)} U^{(n-i)} \quad (4)$$

Die Zerlegung der Steifigkeitsmatrix  $K$  ist dabei bereits aus der Lösung von Gleichung (3) gegeben. Deshalb basiert die Berechnung der  $n$ -ten Ableitung des Verschiebungsfeldes auf Matrixmultiplikation mit geringem numerischen Aufwand, sobald die rechte Seite des Gleichungssystems (4) bestimmt ist, d.h. die höheren Ableitungen der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors berechnet sind. Die Ableitungen sind dabei auf der Elementebene der Finite-Elemente zu bilden und die Ableitungen der gesamten Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors kann durch die in der FEM übliche Assemblierung gewonnen werden, wie in z.B. bei Reh (1993) gezeigt. Eine ähnliche Technik kann angewendet werden, um höhere Ableitungen der Eigenwerte und Eigenformen im Rahmen einer Modalanalyse zu bestimmen.

In der Realität weisen Ergebnisgrößen oft eine Singularität in Abhängigkeit der Eingangsgrößen auf. Dies ist schon am Beispiel einer statischen Strukturanalyse zu ersehen, bei der die Verschiebungen gegen unendlich gehen, wenn der Elastizitätsmodul gegen null geht. An einem recht einfachen Beispiel läßt sich ersehen, dass sich eine solche Singularität sehr negativ auf die Genauigkeit einer Taylorreihenentwicklung auch in den Bereichen auswirkt, die nicht in der Nähe der Singularität liegen. Das Beispiel ist ein einfaches Feder-Masse-System unter Schwerkrafteinwirkung, wie auf der linken Seite von Abbildung 1 zu sehen. Die Gleichgewichtsbedingung für diesen Fall lautet  $ku = -mg$ . Wenn man für die

Federsteifigkeit  $k$  einen Variationsparameter  $p$  in der Form  $k(1+p)$  einführt und die Gleichgewichtsbedingung nach den Verschiebungen  $u$  auflöst, dann erhält man die Beziehung  $u = -mg/(k(1+p))$ . Auf der rechten Seite von Abbildung 1 ist der Fehler zwischen einer Taylorreihenentwicklung bei  $p_0=0$  relativ zur exakten Lösung gezeigt. Man erkennt, dass bei  $p=0$  die Reihenentwicklung wie erwartet genau ist. Ebenfall zu erwarten ist die Tatsache, dass mit zunehmender Ordnung wird der Fehler bei  $p \neq 0$  immer kleiner wird. Überraschenderweise konvergiert die Taylorreihe bei  $p=1$  jedoch nicht, d.h. der Fehler ist auch bei zunehmender Ordnung immer 100%. Dies liegt daran, dass die Genauigkeit durch den Konvergenzradius bestimmt wird, der in diesem Fall für positive und negative Werte von  $p$  gleichermaßen gilt. Bei  $p=-1$  weisen die Verschiebungen jedoch eine Singularität auf, die nicht von einer Taylorreihe endlicher Ordnung abgebildet werden kann. Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist somit auf jeden Fall kleiner als 1. Als Folge liegt auch der Punkt  $p=1$  außerhalb des Konvergenzradiuses. Obwohl bei  $p=1$  selbst keine Singularität vorliegt, kann die Taylorreihe an dieser Stelle das Verschiebungsverhalten nicht korrekt beschreiben.

In einem solchen Fall ist es sinnvoller auf die so genannte Padé-Approximierung überzugehen, bei der anstelle von Polynomfunktionen rationalen Funktionen verwendet werden. Rationale Funktionen bestehen aus einem Bruch mit einem Polynom im Zähler und einem Polynom im Nenner. Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind die Polstellen der Approximierung, mit denen die genannten Singularitäten genau erfasst und beschrieben werden können. Die Details der Padé-Approximierung sind bei Guillaume und Huard (2000) zu ersehen.

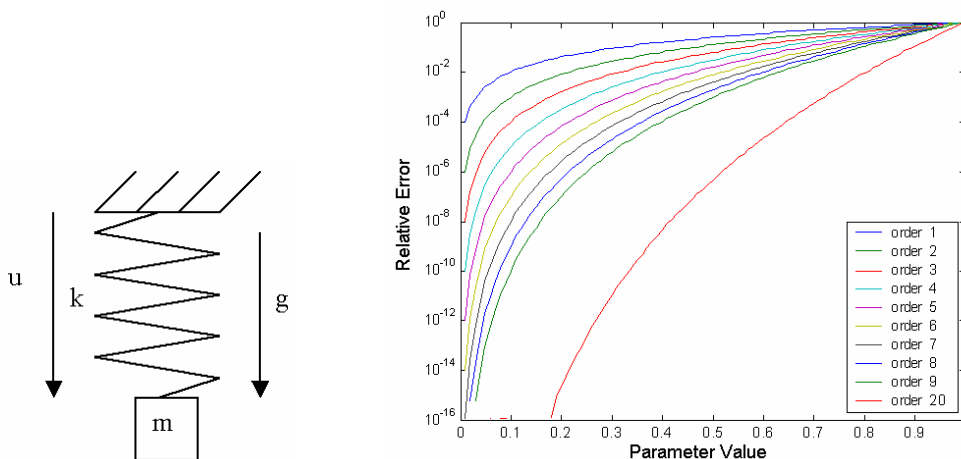


Abbildung 1: Feder-Masse-System (links) und Lösungsfehler (rechts)

Die Variational Technology benötigt wie bereits gesagt nur eine Lösung des Finite-Elemente Problems. Neben dieser numerischen Effizienz sind als weitere Vorteile vor allem die Genauigkeit zu nennen als auch die Tatsache, dass Geometrievariationen ohne Neuvernetzen bearbeitet werden können. Zudem erhält man bei der Variational Technology die Lösung an jedem einzelnen Knoten parametrisch dargestellt, d.h. Fälle, in denen z.B. bei Geometrievariationen das



Spannungsmaximum von einem Ort zu einem anderen springt, sind hier kein Problem.

Ein Nachteil der Variational Technology ist natürlich die Tatsache, dass ihre Anwendbarkeit auf die Gültigkeit der zugrunde liegenden Differenzialgleichung beschränkt. Im Moment können hier nur linear elastische, statische Fälle und Modalanalysen behandelt werden.

### **3 Robust Design eines einfachen Fahrzeugrahmens**

Das Anwendungsbeispiel ist eine Struktur bestehend aus Streben und Platten, die einen simplifizierten body-in-white Fahrzeugrahmen darstellt. Um sowohl den Benzinverbrauch, die Geräusentwicklung und den Fahrkomfort zu optimieren, müssen gleichzeitig mehrere Parameter in Betracht gezogen werden, nämlich das Gewicht, die Eigenfrequenzen und die Steifigkeit des Fahrzeugrahmens. Die Optimierung des Fahrzeugrahmens soll hier nicht nur die einfache Minimierung oder Maximierung der betreffenden Zielgrößen beinhalten, sondern diese Größen sollen zudem auch insensitive gegenüber unvermeidbaren Streuungen und Unsicherheiten sein. Dies bedeutet, dass die Struktur nicht nur optimal hinsichtlich der Leistungscharakteristiken sein, sondern sie soll zugleich robust und zuverlässig sein. Sehr häufig, wenn mehrere Ziele gleichzeitig erreicht werden sollen, stehen einige davon in Konflikt zueinander. Dieses Anwendungsbeispiel verdeutlicht, dass sich solche Konflikte auch hinsichtlich der Robustheitsanforderungen ergeben können.

#### **3.1 Beschreibung des deterministischen Modells**

Das Finite-Elemente Modell besteht aus Balken- und Schalenelementen. Mit dem Modell wurden zwei verschiedene Analysen durchgeführt, eine statische Analyse um die Torsionssteifigkeit zu bestimmen und eine Modalanalyse um die ersten 11 Eigenfrequenzen zu berechnen. Bei der Modalanalyse wurden der vordere und hintere Teil der Bodenplatte fixiert. Die Randbedingungen für beide Analysen, als auch die Ergebnisse der Rechnung, sind jeweils in Abbildung 2 und Abbildung 3 zu sehen.

Bei der Optimierung des Fahrzeugrahmens gibt es vier Design-Variablen, nämlich die Länge und Höhe des Fahrzeugs, die Breite der Bodenplatte und die Breite des Daches. Alle vier Design-Variablen sind Parameter, die in einem CAD-System definiert sind. Eine Änderung der Optimierungsvariablen hat somit auch einen Aufruf des CAD-Systems und eine Neuübertragung der geänderten Modelldaten in das Finite-Elemente System zur Folge.

#### **3.2 Beschreibung des probabilistischen Modells**

Bei diesem Anwendungsbeispiel wurden zwei Unsicherheiten und Streuungen berücksichtigt und als Zufallsvariablen modelliert, und zwar der Elastizitätsmodul und die Materialdichte. Der Elastizitätsmodul folgt einer Gauss-Verteilung mit einem Mittelwert von 200'000 MPa und einer Standardabweichung von 10'000 MPa. Die Materialdichte folgt einer lognormalen Verteilung mit einem Mittelwert von 7'850 kg/m<sup>3</sup> und einer Standardabweichung von 392.5 kg/m<sup>3</sup>.

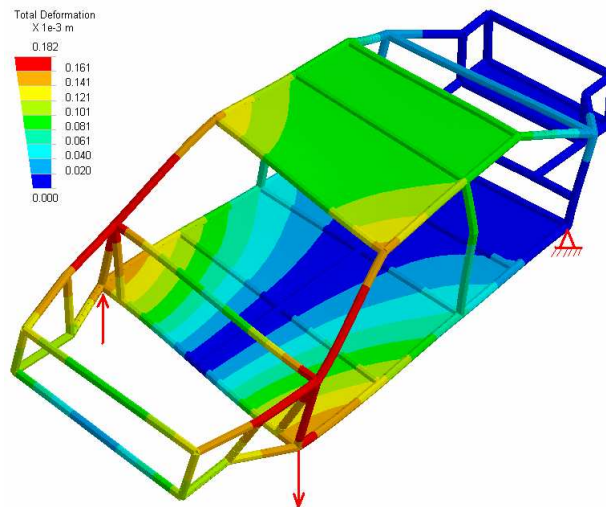


Abbildung 2: Verdrehung des Rahmens

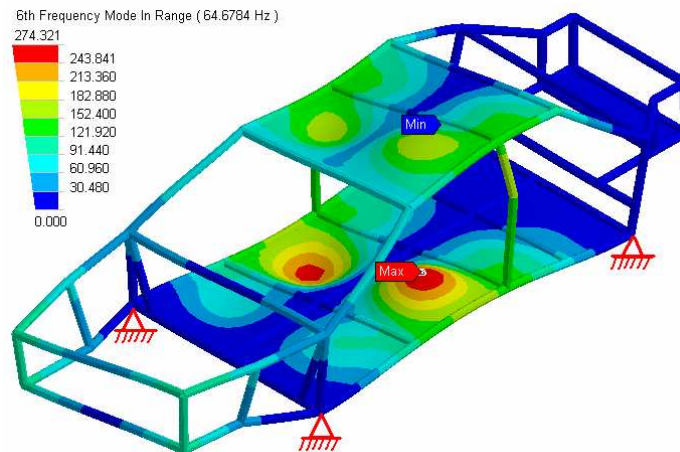


Abbildung 3: Sechste Eigenform des Rahmens

### 3.3 Ergebnisse der probabilistischen Analyse

Um die Auswirkungen der Streuungen auf die Finite-Elemente Ergebnisse zu quantifizieren wurden alle oben genannten Verfahren angewendet. Als Vergleichsmaßstab dienen 2'500 Monte Carlo Simulationen unter Verwendung des Finite-Elemente Modells. Es wurde beide Antwortflächenverfahren angewendet – das auf Design-of-Experiment basierende klassische Antwortflächenverfahren und die Variational Technology. Bei den Antwortflächenverfahren wurden jeweils 10'000 Monte Carlo Simulation unter Verwendung der Antwortflächen herangezogen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4 und Abbildung 5 verglichen und es ist offensichtlich, dass die Ergebnisse sehr gut miteinander übereinstimmen.

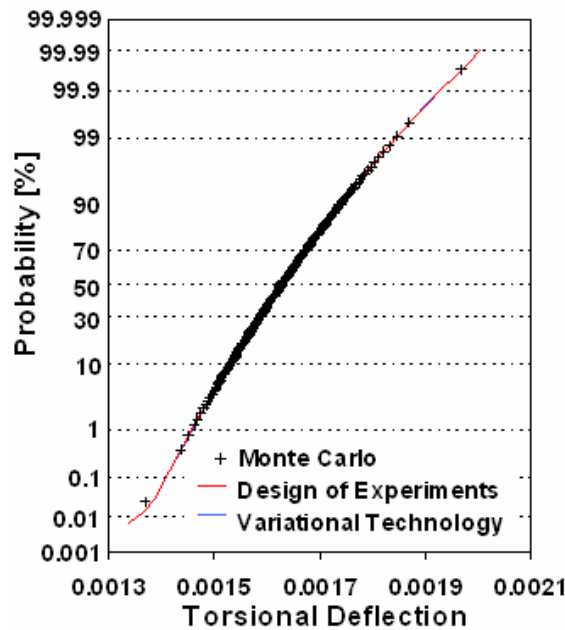


Abbildung 4: CDF der maximalen Drehverformung

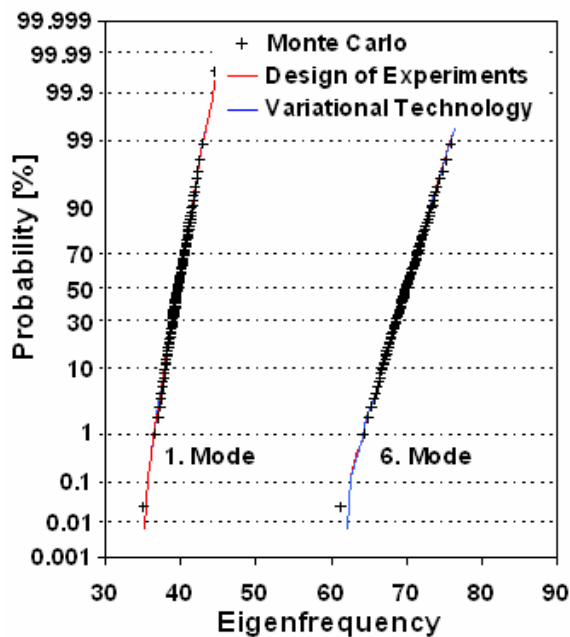


Abbildung 5: CDF der ersten und sechsten Eigenfrequenz

In Tabelle 1 und Tabelle 2 sind zudem der numerische Aufwand der drei Methoden verglichen. Dieser Vergleich verdeutlicht die Stärke der Antwortflächenverfahren. Besonders die Variational Technology ist in diesem Beispiel sehr effizient. Die Ergebnisse der Monte Carlo Simulationen enthalten dabei einen Faktor 4 um die entsprechend geringere Anzahl an Simulationen auszugleichen.

<b>Analyseschritt</b>	<b>Monte Carlo</b>	<b>Design-of-Experiments</b>	<b>Variational Technology</b>
Generierung der Antwortflächen	---	312.3	195.9
Monte Carlo Simulationen	347'000	5.0	18.0
Gesamte CPU Zeit	347'000	317.3	195.9

Tabelle 1: Rechenzeitaufwand (in Sek.) um die kumulative Verteilungsfunktion der statischen Rechnung zu bestimmen

<b>Analyseschritt</b>	<b>Monte Carlo</b>	<b>Design-of-Experiments</b>	<b>Variational Technology</b>
Generierung der Antwortflächen	---	251.1	159.9
Monte Carlo Simulationen	279'000	4.0	88.0
Gesamte CPU Zeit	279'000	255.1	247.9

Tabelle 2: Rechenzeitaufwand (in Sek.) um die kumulative Verteilungsfunktion der Modalanalyse zu bestimmen

### 3.4 Robust Design Studie

Eine optimale Fahrzeugstruktur soll gegeben sein, wenn das Gewicht und die maximale Drehverformung minimiert, die Eigenfrequenzen aber alle maximiert sind. Zusätzlich sollen die Standardabweichungen aller dieser Größen minimiert werden, um ein robustes Design zu erhalten. Ohne auf die Details einzugehen, kann konstatiert werden, dass es nicht zu einem Konflikt führt, die Mittelwerte dieser Größen wie gewünscht zu minimieren bzw. zu maximieren. Ein solcher Konflikt ergibt sich allerdings bei dem Versuch die Standardabweichung der maximalen Drehverformung als auch der sechsten Eigenfrequenz zu minimieren. Beide Standardabweichungen gleichzeitig zu minimieren ist nicht möglich, wie in Abbildung 6 gezeigt. Diese Situation ist ein typisches Trade-Off Szenario bei den die Verbesserung einer Zielgröße nur auf Kosten einer anderen möglich ist. In einer solchen Situation bedarf es einer Entscheidung, welche Zielgröße wie wichtig ist und wie weit aufgegeben werden kann, um zu einem Kompromiss und einer Konfliktlösung zu gelangen. Die Visualisierung des Trade-Off Szenarios, wie in Abbildung 6 geschehen, ist ein wesentliches Werkzeug, um zu einer solchen Entscheidungen zu gelangen.

### Danksagung

Für wertvolle Hinweise und konstruktive Diskussionen sind die Autoren Herrn Trevor Craney, früher bei Pratt&Whitney und jetzt bei Sikorsky, sehr dankbar.

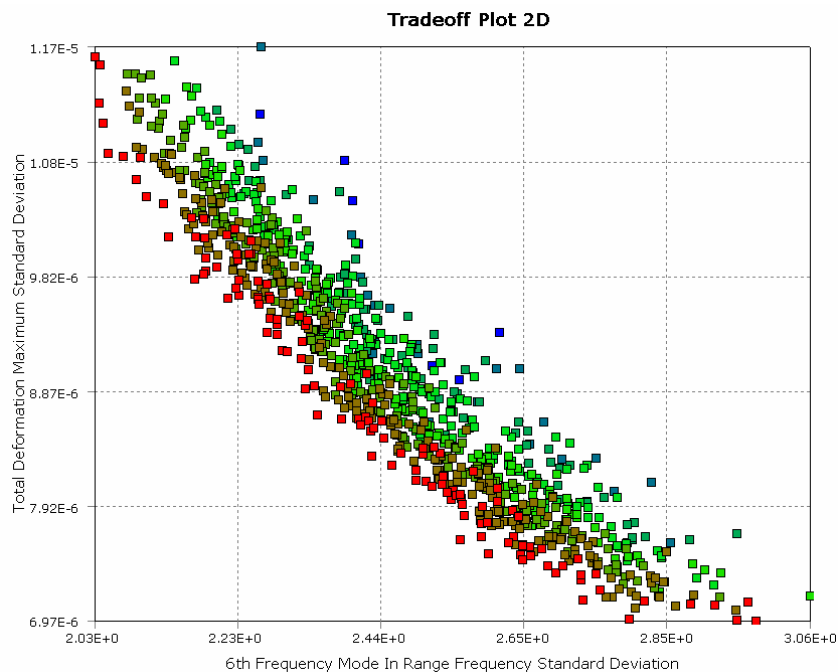


Abbildung 6: Trade-Off zwischen den Standardabweichungen der maximalen Drehverformung und der sechsten Eigenfrequenz

## Literatur

- ANG, A. H.-S.; TANG W. H.: *Probabilistic concepts in engineering planning and design – Volume I: Basic principles*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1975
- ANG, A. H.-S.; TANG W. H.: *Probabilistic concepts in engineering planning and design – Volume II: Decision, risk and reliability*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1984
- AYYUB, B. M.; LAI, K.-L.: Structural reliability assessment using latin hypercube sampling. In: ANG, A. H.-S. (HRSG.); SHINOZUKA, M. (HRSG.); SCHÜELLER, G. I. (Hrsg.): *Structural Safety and Reliability*. New York, USA: Proceedings of ICOSSAR '89, ASCE, 1990, S. 1177 – 1184
- BOX, G. E. P.; BEHNKEN, D. W.: Some new three level designs for the study of quantitative variables. In: *Technometrics* 2 (1960) S. 455 – 476
- BOX, G. E. P.; COX, D. R.: An analysis of transformation. In: *TeJournal of the Royal Statistical Society* Vol. Series B (1961) S. 211 – 243
- CRANEY, T. A.: *Response surface method developments for probabilistic engineering design*, University of Maryland, Master thesis, 2002

- FLORIAN, A.: An efficient sampling scheme: updated latin hypercube sampling. In: *International journal of probabilistic engineering mechanics* 7 (1992) S. 123 – 130
- FORMICA, A.: A science based approach to engineering stochastic simulations. In: MARCZYK, J. (HRSG.): *Computational stochastic mechanics in a meta-computing perspective*. Barcelona, Spain: CIMNE, 1990, S. 19 – 38
- GUILLAUME, PH.; HUARD, A: Multivariate Padé approximation. In: *Journal of computational and applied mathematics* 121 (2000) S. 197 – 219
- HARRY, M. J.; LAWSON, J. R.: *Six Sigma producibility analysis and process characterization*. Boston, MA: Addison-Wesley, 1992
- HAFTKA, R. T.: Second order sensitivity derivatives in structural analysis. In: *AIAA journal* 20 (1982) S. 1765 – 1766
- KECCECIOGLU, D: *Reliability engineering handbook*. Upper Sadle River, NJ: Prentice Hall, 1991
- MONTGOMERY, D. C.: *Design and Analysis of Experiments*. New York, NY: Wiley, 1991
- PARKS, J. M.: On stochastic optimization: Taguchi methods demystified; its limitations and fallacy clarified. In: *International journal of probabilistic engineering mechanics* 16 (2001) S. 87 – 101
- REH, S.: *Zuverlässigkeit komplexer Bauteile mit Hilfe der stochastischen Finite-Elemente Methode*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 1993
- REH, S.; BELEY, J.-D.; MUKHERJEE, S.; KHOR, E.-H.: Probabilistic finite element analysis using ANSYS. In: *International journal of structural safety* 28 (2006) S. 17 – 43
- SHANNON, C. E.: A mathematical theory of communication. In: *The Bell Systems Technical Journal* 27, 7&10 (1948), S. 379 – 423 & 623 – 656
- TAGUCHI, G.; KONISHI, S.: *Taguchi methods: Signal-to-noise ratio for quality evaluation*. Burr Ridge, IL: Irwin Professional Publishing, 1993