

Techniken der Formoptimierung

Kai-Uwe Bletzinger, Matthias Firl, Fernað Daoud

Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München

Zusammenfassung

Der Erfolg einer Formoptimierung wird wesentlich von Flexibilität und Stabilität der Verfahren bestimmt, die für Kontrolle und Modifikation der Geometrie verwendet werden. Die Vorzüge von CAD/CAGD-Methoden hinsichtlich Modellparametrisierung werden meist vom Modellierungsaufwand aufgezehrt, so dass damit eine Formoptimierung in der Konzeptphase einer Produktentwicklung i.d.R. nicht möglich, weil zu aufwändig, ist. Die „parameterfreie“ Optimierung direkt am FE-Netz erlaubt dagegen einen flexiblen Einsatz bei großen Formfreiheiten und einem Minimum an Modellierungsaufwand, setzt allerdings die Verwendung zusätzlicher Stabilisierungsverfahren voraus, um physikalische Sinnfälligkeit der Ergebnisse zu garantieren. Dabei durchdringen sich physikalische, geometrische und Aspekte der FE-Technologie in komplexer Weise. Der Beitrag gibt einen Überblick über die wichtigsten dabei eingesetzten Techniken.

Keywords: Formoptimierung, Netzstabilisierung,

1 Einführung

Die Optimierung technischer Bauteile und Konstruktionen, kurz Strukturoptimierung genannt, ist ein zunehmend wichtiger Bestandteil einer umfassenden numerischen Simulation im Sinne des Computational Engineering. Die numerische Strukturoptimierung spart die Entwicklung teurer Prototypen bzw. erlaubt die zielgerichtete Interpretation von Versuchsergebnissen. Andererseits bedeutet Strukturoptimierung eine gewaltige Herausforderung an Methoden und Anwender, die aus der Komplexität der Wechselwirkungen zwischen Theorie, Numerik, Datenumfang und informationstechnischer Umsetzung herrühren. Die technischen Möglichkeiten erlauben heute zumindest grundsätzlich alles zu optimieren, das sich auch einer „einfachen“ numerischen Simulation erschließt. In einer Optimierungsschleife automatisiert und sich mehr oder weniger selbst überlassen, finden die eingesetzten Techniken jedoch oft nicht das physikalisch sinnvolle Ergebnis sondern nutzen die Defizite der Verfahren aus. Als Anwender von Strukturoptimierung sollte man sich dessen stets bewusst sein. Ganz besonders hohe Anforderungen an alle eingesetzten Techniken und ihre Wechselwirkungen stellt dabei die Formoptimierung.

2 Grundlagen

2.1 Die Optimierungshierarchie

Grundsätzlich wird zwischen Querschnittsoptimierung (Sizing), Formoptimierung (Shape optimal design) und Topologieoptimierung unterschieden. Bei der Querschnittsoptimierung werden ausschließlich Querschnittswerte (Dicke, Höhe, Querschnittsfläche, Trägheitsmoment etc.) als Optimierungsvariablen verwendet. Dagegen sind bei der Formoptimierung auch geometrische Größen als Variablen möglich. Bei der Topologieoptimierung wird das grundsätzlich beste Tragwerk unter verschiedenen Varianten gesucht, Abb. 1.

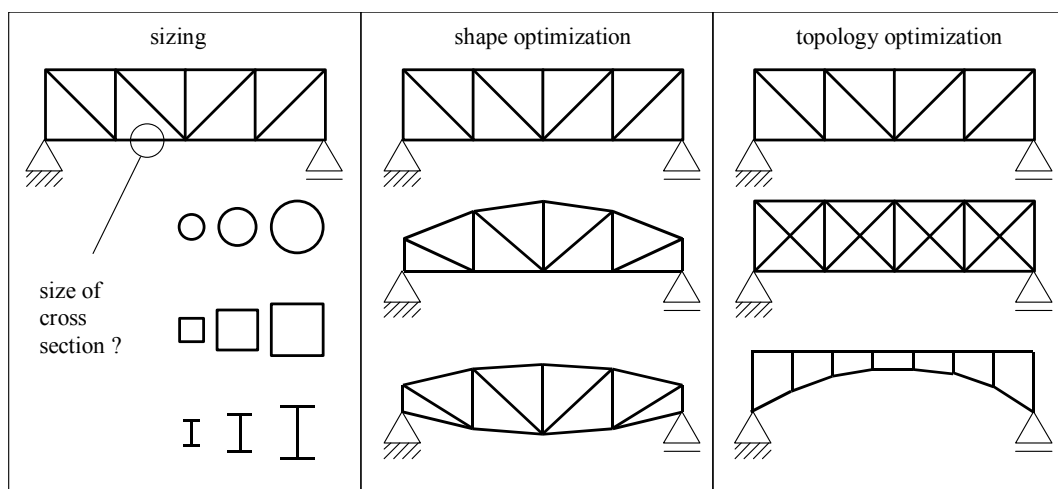


Abbildung 1: Hierarchiestufen der Strukturoptimierung

2.2 Das kontinuierliche Problem

Gesucht ist die Verteilung der variablen Größen s , so dass die Zielfunktion f optimiert wird unter gleichzeitiger Beachtung von Nebenbedingungen g . Zunächst ist damit eine Aufgabe der Variationsrechnung beschrieben. So soll z.B. die optimale Formgebung eines Balkens gesucht sein, dessen Steifigkeit bei einer konstanten Masse maximiert werden soll, Abb. 2.

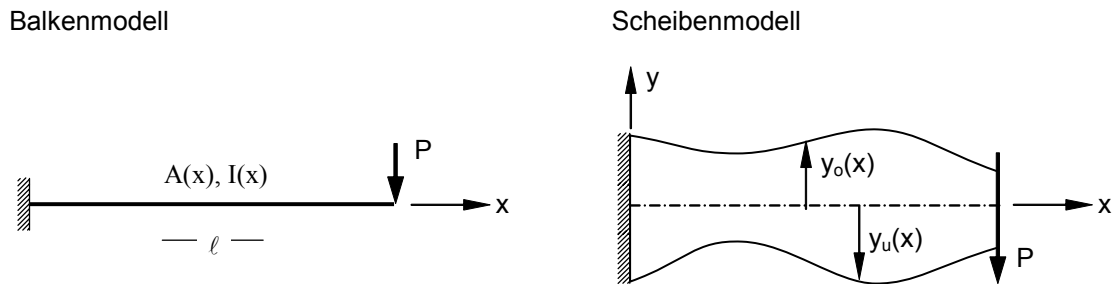


Abbildung 2: Formoptimierung eines Kragbalkens

Die Unterscheidung in Querschnitts- bzw. Formoptimierung ist eine Folge des gewählten mechanischen Modells.

Querschnittsoptimierung/Balkenmodell; gesucht: Verläufe $A(x)$, $I(x)$ von Querschnittsfläche und Trägheitsmoment:

$$\text{Zielfunktion: } f = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x) \kappa^2 dx \rightarrow \min_{A(x), I(x)}$$

$$\text{Nebenbedingung: } g = \int_0^\ell \rho A(x) dx - M = 0 \quad (1)$$

$$\text{Zustandsgleichung (Gleichgewicht, PvV): } \delta W = \int_0^\ell EI(x) \kappa \delta \kappa dx - P \delta w = 0$$

Formoptimierung/Scheibenmodell; gesucht: oberer und unterer Rand $y_o(x)$, $y_u(x)$:

$$\text{Zielfunktion: } f = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} \sigma \varepsilon t dy dx \rightarrow \min_{y_o, y_u}$$

$$\text{Nebenbedingung: } g = \int_0^\ell \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} \rho t dy dx - M = 0 \quad (2)$$

$$\text{Zustandsgleichung (Gleichgewicht, PvV): } \delta W = \int_0^\ell \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} \sigma \delta \varepsilon t dy dx - P \delta w = 0$$

Beide Probleme sind in der dargestellten Form Aufgaben der Variationsrechnung. Gesucht sind optimale Funktionsverläufe $A(x)$, $I(x)$ bzw. $y_o(x)$ und $y_u(x)$. Der grundsätzliche Unterschied besteht darin, dass bei der Formoptimierung der Integ-

rationsbereich ebenfalls von den variablen Größen abhängt, wohingegen bei der Querschnittsoptimierung der Integrationsbereich während der Optimierung unverändert bleibt. Dieser Unterschied hat weitreichende Konsequenzen in Theorie und praktischer Umsetzung.

Die übliche Formulierung der Topologieoptimierung ist deshalb eine Aufgabe der Querschnittsoptimierung: Der Integrationsbereich bleibt während der Optimierung unverändert, optimiert wird die Materialverteilung innerhalb des Entwurfsraums.

2.3 Diskretisierung, Parametrisierung

Für den numerischen Zugang z.B. mit der Methode der Finiten Elemente werden Verschiebungen und Geometrie unter Verwendung der Formfunktionen N_i als Funktionen der Knotengrößen \mathbf{u} bzw. $\hat{\mathbf{x}}$ diskretisiert:

$$\begin{aligned} \text{Verschiebungen: } \mathbf{u}_h &= \sum_n N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i \\ \text{Geometrie: } \mathbf{x}_h &= \sum_n N_i(\xi, \eta) \hat{\mathbf{x}}_i \end{aligned} \quad (3)$$

Damit lassen sich die ursprünglichen kontinuierlichen Optimierungsaufgaben (1) und (2) als Parameteroptimierungsaufgaben darstellen. Man unterscheidet Zustandsparameter \mathbf{u} und Geometrieparameter $\hat{\mathbf{x}}$. Meist werden CAD/CAGD Methoden als Preprozessor verwendet, um die Geometrie der FE-Netze zu generieren. Zwischen den Parametern \mathbf{d} der CAD/CAGD-Modelle und den Geometrieparametern $\hat{\mathbf{x}}$ des FE-Netzes besteht der grundsätzlich gleiche Zusammenhang wie in (3):

$$\text{Design - Patch: } \hat{\mathbf{x}}_i = \sum_n D_j(r_i, s_i) \mathbf{d}_j \quad (4)$$

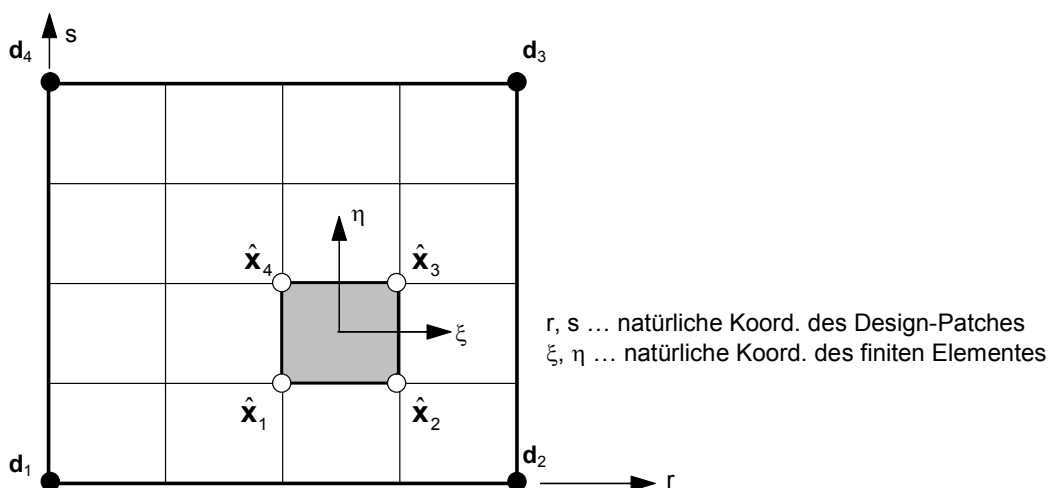


Abbildung 3: Design-Patch mit generiertem FE-Netz

Nach der Diskretisierung wird aus (2):

$$\text{Zielfunktion: } f = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \rightarrow \min_{\mathbf{s}}$$

$$\text{Nebenbedingung: } g = \sum_{\text{Elemente}} \left(\int \rho \det \mathbf{J} d\xi d\eta \right) - M = 0 \quad (5)$$

$$\text{Zustandsgleichung: } \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P}$$

mit den üblichen Bezeichnungen \mathbf{u} , \mathbf{K} , \mathbf{P} , und \mathbf{J} für den Vektor der Knotenverschiebungen, der Systemsteifigkeitsmatrix, dem Vektor der äußeren Kräfte und der Jakobimatrix. Man spricht dann von Formoptimierung, wenn die Menge \mathbf{s} der Optimierungs- oder Entwurfparameter Geometrieparameter beinhaltet. Obwohl es sich in der dargestellten Form (5) grundsätzlich um Parameteroptimierung handelt, spricht man dennoch von „Parameter freier Formoptimierung“, wenn die Geometrieparameter $\hat{\mathbf{x}}$ des FE-Netzes direkt als Optimierungsparameter verwendet werden. Dagegen spricht man gewöhnlich von „parametrisierter Formoptimierung“, wenn die Entwurfparameter \mathbf{d} der CAD/CAGD-Modelle als Optimierungsparameter verwendet werden.

2.4 NAND, Nested Analysis and Design

Unter NAND versteht man Strukturoptimierung unter Berücksichtigung der impliziten Abhängigkeit der Zustandsgrößen \mathbf{u} von den Entwurfparameter \mathbf{s} :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) &\rightarrow \min_{\mathbf{s}} \\ g_j(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) &\leq 0; \quad j = 1, \dots, m_g \\ h_j(\mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s})) &= 0; \quad j = 1, \dots, m_h \end{aligned} \quad (6)$$

Aus der Zustandsgleichung $\mathbf{K}(\mathbf{s})\mathbf{u}(\mathbf{s}) = \mathbf{P}(\mathbf{s})$ wird \mathbf{u} als Funktion von \mathbf{s} bestimmt. Dieses Vorgehen ermöglicht, unterschiedliche, getrennte Programmmodule für Design (CAD/CAGD), FE-Analyse und mathematischer Programmierung zu verwenden. Es stellt den derzeitigen Stand der Technik dar. Die Größe des Optimierungsproblems wird von der Zahl der Entwurfparameter bestimmt. Bei wenigen Entwurfparametern können deshalb auch einfache Optimierungsverfahren eingesetzt werden. Dieses Vorgehen eignet sich insbesondere für physikalisch sehr komplexe Probleme (z.B. Crash). Es können dabei die Vorzüge der einzelnen Programmmodule ausgenutzt werden. Als potentielle Entwurfparameter kommen alle verfügbaren Parameter der eingesetzten CAD/CAGD Modelle in Frage. Entscheidend für den praktischen Erfolg sind die Realisierung der datentechnischen Bezüge zwischen den einzelnen Programmmodulen und die Verfügbarkeit eines robusten Optimierungsverfahrens.

2.5 SAND, Simultaneous Analysis and Design

Beim Zugang nach SAND werden \mathbf{u} und \mathbf{s} als unabhängige Größen eingeführt. Die Zustandsgleichung erscheint dann als zusätzliche Gleichheitsnebenbedingung:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{s}, \mathbf{u}) &\rightarrow \min_{\mathbf{s}, \mathbf{u}} \\
g_j(\mathbf{s}, \mathbf{u}) &\leq 0; \quad j = 1, \dots, m_g \\
h_j(\mathbf{s}, \mathbf{u}) &= 0; \quad j = 1, \dots, m_h \\
\mathbf{K}(\mathbf{s})\mathbf{u}(\mathbf{s}) &= \mathbf{P}(\mathbf{s})
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Anzahl der Zustandsgrößen geht dabei in die Zahl der Optimierungsparameter ein, so dass man es bei diesem Vorgehen typischerweise mit sehr großen Optimierungsproblemen zu tun hat. In der Mathematik verwendet man für diese Formulierung die Bezeichnung „Optimierung mit PDE-Nebenbedingungen“. Damit ist die Zustandsgleichung gemeint. Der Vorteil dieses Vorgehens kommt dadurch zum Tragen, dass man spezielle Strukturen einer Optimierungsaufgabe nutzen und besondere, sehr effiziente Algorithmen entwickeln kann. So zum Beispiel bei Parameter freier Formoptimierung. Für allgemein einsetzbare Optimierungsumgebungen kommt diese Methode typischerweise nicht in Frage. Diese Eigenschaft hat SAND mit den Methoden der Optimalitätskriterien gemeinsam.

2.6 Sensitivitätsanalyse

Bei der Ableitung von Strukturantworten q (Zielfunktion f und Nebenbedingungen g und h) nach den Optimierungsparametern \mathbf{s} muss bei SAND die implizite Beziehung zwischen \mathbf{u} und \mathbf{s} berücksichtigt werden, z.B.:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_j}{ds} &= \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \\
\text{aus } \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \text{ folgt } \frac{d\mathbf{u}}{ds} &= \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{u} \right) \\
\therefore \frac{dq_j}{ds} &= \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{u} \right)
\end{aligned} \tag{8}$$

Die direkte Berechnung der Sensitivitätsanalyse, indem zuerst aus (8.2) die Ableitungen der Zustandsparameter $d\mathbf{u}/ds$ bestimmt und dann in (8.1) substituiert werden, ist effizient, wenn die Zahl der Strukturantworten q_j größer ist als die Zahl der Entwurfparameter \mathbf{s} . Andernfalls ist das adjungierte Vorgehen vorzuziehen. Dann werden zuerst die sogenannten adjungierten Variablen λ bestimmt und dann in (8.3) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} \lambda_j &= \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{u}} \\
\therefore \frac{dq_j}{ds} &= \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{s}} + \lambda_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{u} \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Zum Beispiel bei fluidmechanischen Fragestellungen, wenn die Zahl der Zustandsgrößen besonders groß ist, ist die adjungierte Sensitivitätsanalyse von wesentlicher Bedeutung für einen effizienten Optimierungsalgorithmus.

2.7 Optimierungsverfahren

Die Wahl eines geeigneten Verfahrens ist von Art und Größe des Problems geprägt. Besondere Herausforderungen bedeuten nichtkontinuierliche oder diskrete Probleme. In der Regel sind sie vom NAND Typ. Dafür eignen sich insbesondere gradientenfreie Methoden, z.B. direkte Suchmethoden, Genetische oder Evolutionäre Algorithmen, die wegen der leichten Handhabbarkeit zunehmend an Beliebtheit gewinnen. Bei großen Problemen des SAND Typs kommen in der Regel nur Gradienten basierte meist Newton- oder Newton-ähnliche Verfahren in Frage.

3 Spezielle Eigenarten der Formoptimierung

3.1 Oberfläche und Gebiet

Formoptimierung bedeutet Modifikation der Oberfläche eines Bauteils. Für ein diskretisiertes Modell bedeutet dies, dass nur Lageänderungen der Oberflächenknoten senkrecht zur Oberfläche relevant sind. Geometriemodifikationen der Knoten im Gebiet bzw. tangential an der Oberfläche dagegen tragen im Rahmen der Diskretisierungsfehler nicht zu einer Modifikation des modellierten Bauteils bei. Bei Flächentragwerken ist dies besonders ausgeprägt, Abb. 4.

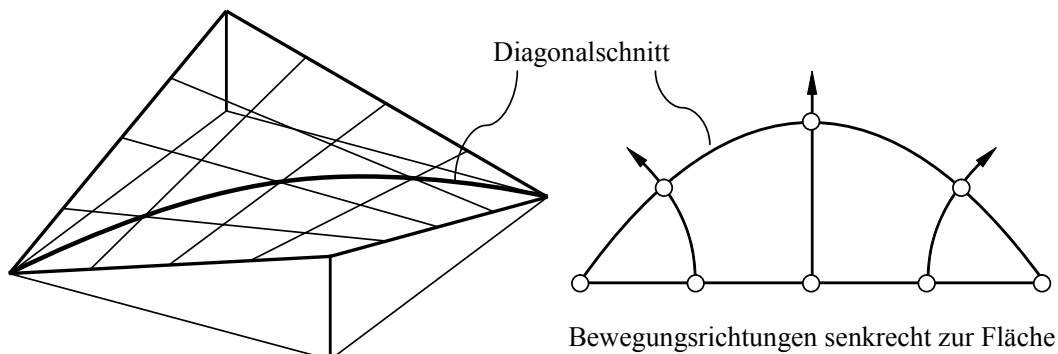
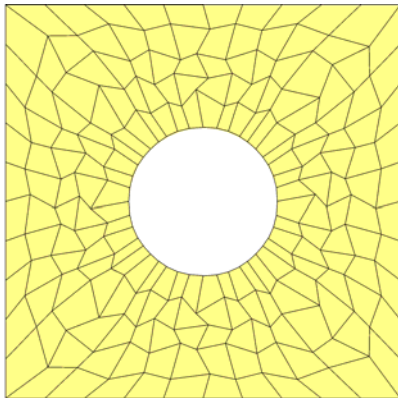


Abbildung 4: Formoptimierung einer HP-Schale mit festen Rändern

Unter „Shape Derivative“ versteht man die Ableitung der Bauteilgeometrie hinsichtlich „relevanter“ Geometriemodifikationen, i.d.R. der Oberfläche in einer Richtung mit zur Oberfläche senkrechter Komponente. Lässt man hingegen tangentielle Geometrieänderungen innerer Knoten als Entwurfsvariablen zu, z.B. x- und y-Koordinaten innerer Knoten eines Scheibenmodells, so wird das vom Verfahren erkannte „Optimum“ von den methodischen Defiziten der mechanischen Simulation geprägt. So werden z.B. verzerrte finite Elemente infolge der Locking-Eigenschaften als steifer und deshalb „besser“ eingeschätzt als unverzerrte, Abb. 5.

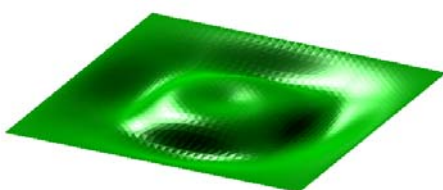


Verzerrtes FE-Netz als Ergebnis der Maximierung der Steifigkeit. Die verzerrten Elemente täuschen eine höhere Steifigkeit vor.

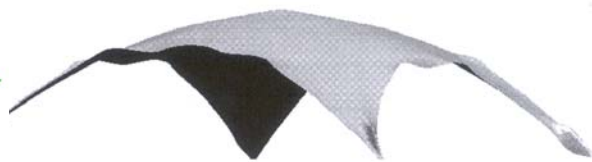
Abbildung 5: Infolge Optimierung erzeugtes Elementnetz

Der Effekt wird vermieden, wenn die Bewegung innerer Knoten während der Optimierung mit der Modifikation der Ränder gekoppelt wird. Bei einer „Parametrischen Formoptimierung“ werden die CAD-Parameter als Entwurfsparameter verwendet und das Problem ist i.d.R. gelöst.

Unerwünschte Oszillationen der „optimalen“ Geometrie können aber selbst bei einer „Parametrischen Formoptimierung“ auftreten, wenn das CAD/CAGD-Modell zu „fein“ geraten ist. Dabei können selbstverständlich auch Versteifungseffekte eine Rolle spielen. Es ist aber ebenfalls möglich, dass das Optimierungsproblem ausgeprägt nichtkonvex ist und sich unter den vielen möglichen lokalen Optima im Rahmen des diskreten Geometriemodells eine Lösung mit zufälliger Überlagerung von Geometrieoszillationen unterschiedlicher Wellenlängen einstellt, Abb. 6. Bei den dargestellten Beispielen wurde die Steifigkeit von dünnen Schalen (z.B. dünne Bleche bei der Sickenoptimierung) maximiert. Formparameter waren die Koordinaten von Gridpunkten von CAGD-Modellen aus bikubischen Bézier-Patches.



Prinzipbeispiel „Sickenoptimierung“



Freiformschale

Abb. 6: Formoptimierung mit CAGD-Modellen: Kombination von Bézier-Patches

Zusammenfassend ist festzustellen, dass bei der Formoptimierung mit „feiner“ Geometrieparametrisierung grundsätzlich mit Resultaten zu rechnen ist, die eine i.d.R. unerwünschte oszillierende Geometrie aufweisen. Dem kann dadurch begegnet werden, dass zusätzliche Stabilisierungsmaßnahmen getroffen werden, die allerdings meist wieder die Formfreiheiten einschränken. Vielen Anwendern der Formoptimierung ist dies nicht bewusst, was auch daran liegt, dass sich Ursache und Wirkung dieses Effekts bei jeder Anwendung anders darstellen. Meist fällt er deshalb nicht auf, weil insbesondere bei komplizierten CAD-Modellen nur ver-

gleichsweise wenige Formvariable verwendet werden. Andererseits erfordert die indirekte Kontrolle möglicher optimaler Formen mittels geeignet gewählter CAD-Modelle viel Erfahrung und aufwändige Modellierung. Als Konsequenz wird deshalb Formoptimierung meist nur bei der Detailoptimierung und nicht beim Konzeptentwurf eingesetzt.

3.2 Parameterfreie Formoptimierung und Geometriestabilisierung

Bei der „Parameterfreien Formoptimierung“ werden verschiedene Methoden verwendet, um die Geometrie der FE-Netze im inneren Gebiet an die Modifikationen des Randes anzupassen, wie z.B. Laplace Glätter oder einfache geometrische Maßnahmen, die die Netze in der Nähe des Randes nachziehen. Bei Freivernetzungsmethoden oder der Fluid-Struktur-Wechselwirkung treten ähnliche Fragestellungen auf.

3.2.1 Mechanische Stabilisierung I: Seifenhautanalogie

Weitere Möglichkeiten der Netzstabilisierung ergeben sich aus mechanischen Analogiebetrachtungen. Insbesondere im Kontext der Formfindung vorgespannter Membrane (z.B. Zelte, Faltdächer etc.) findet die „Seifenhautanalogie“ in Verbindung mit der „Updated Reference Strategie“ (URS) Anwendung. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung der für Seiltragwerke bekannten „Kraftdichte Methode“. Dabei bestimmt die Gleichgewichtslage eines Oberflächenzustandes σ die optimale Position aller Knoten der Geometrie simultan hinsichtlich des Optimierungszieles und der ausgeglichenen Verteilung auf der Oberfläche. Die Stabilisierung wird dabei mittels eines Homotopieverfahrens erzielt, indem die Ähnlichkeit des Cauchy-Spannungstensors σ bezüglich der aktuellen Geometrie und des 2. Piola-Kirchhoffspannungstensors S bezüglich einer nachgezogenen Referenzgeometrie verwendet wird. Die maßgebende Gleichung berücksichtigt dies durch die Überlagerung der beiden Zustände mittels des Homotopiefaktors λ .

$$\delta w = \lambda t \int_A \det \mathbf{F} (\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA + (1 - \lambda) t \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad (10)$$

Dabei ist \mathbf{F} der Deformationsgradient. Abbildung 7 zeigt die Anwendung für die parameterfreie Formfindung eines vorgespannten Zeltdaches. Entwurfsparameter sind dabei die Raumkoordinaten aller FE-Knoten auf Rand und Fläche. Vorgegeben sind lediglich die Positionen der Hoch- und Tiefpunkte sowie das Verhältnis von Randseilkraft und Flächenspannung. Man erkennt sehr schön die ausgleichende Wirkung der Methode für die Knotenverteilung auf der Fläche. Die Vorspannung ergibt die eindeutige negativ doppelt gekrümmte optimale Form.

Abbildung 8 zeigt eine interessante Anwendung. Hier wird Parametrische Formoptimierung kombiniert mit Freivernetzung und URS zur Netzstabilisierung. Eine

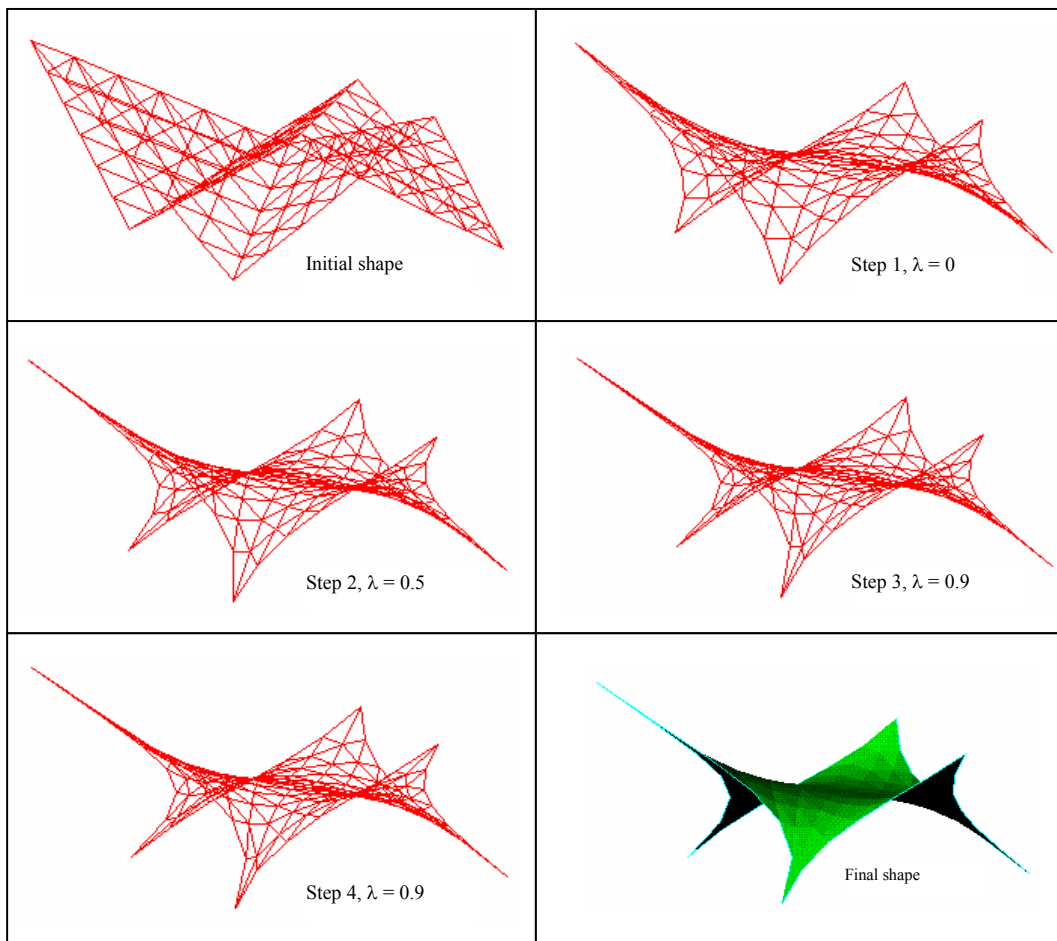


Abb. 7: URS für die Parameterfreie Formfindung eines vorgespannten Zeltes

zusätzliche fiktive Oberflächenspannung wird nur zur Stabilisierung verwendet. Der Rand wird von einem B-Spline beschrieben, dessen Knoten frei in der Ebene vom Optimierungsalgorithmus angeordnet werden können, so dass das Gewicht bei vorgegebenen zulässigen Spannungen minimiert wird. Unter Berücksichtigung lediglich der Lagerbedingungen und der Symmetriebedingungen ausschließlich für die Knoten auf der Symmetrieachse verfügt das Beispiel über 26 Entwurfparameter. Es werden keine Bewegungsrichtungen oder sonstigen zusätzlichen Maßnahmen außer URS für die Netzstabilisierung ergriffen. Unter Verwendung eines SQP-Verfahrens konvergiert das Problem zuverlässig. Verschiedentlich wird neu vernetzt, um die Netzqualität zu erhalten. Man erkennt die großen Geometrieänderungen, die mit diesem Verfahren möglich sind.

3.2.2 Mechanische Stabilisierung II: mechanische Grundformen

Anstelle der geometrisch definierten CAD/CAGD-Modelle können ggf. die Deformationen eines mechanischen Ersatzmodells verwendet werden, um die Lage der Knoten im Inneren einer zu optimierenden Struktur festzulegen. Zum Beispiel eignet sich ein „Hängemodell“ bei der Formoptimierung von Schalen. Dabei

spielen die Daten eines formgebenden Lastfalls am Ersatzmodell die Rolle der Entwurfparameter, Abb. 9.

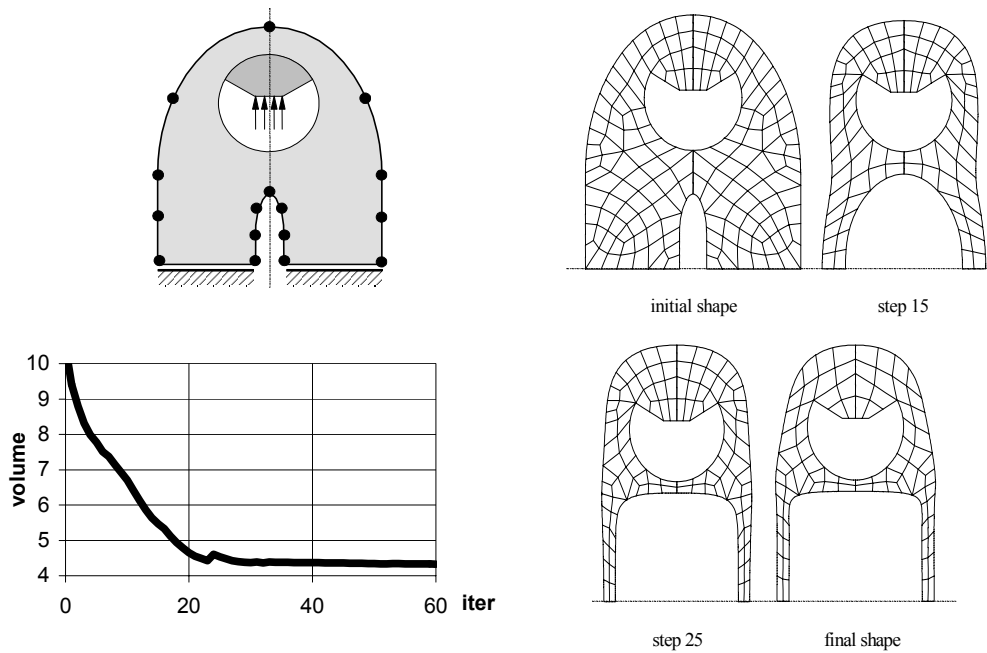


Abb. 8: Gewichtsminimierung eines Pleuels

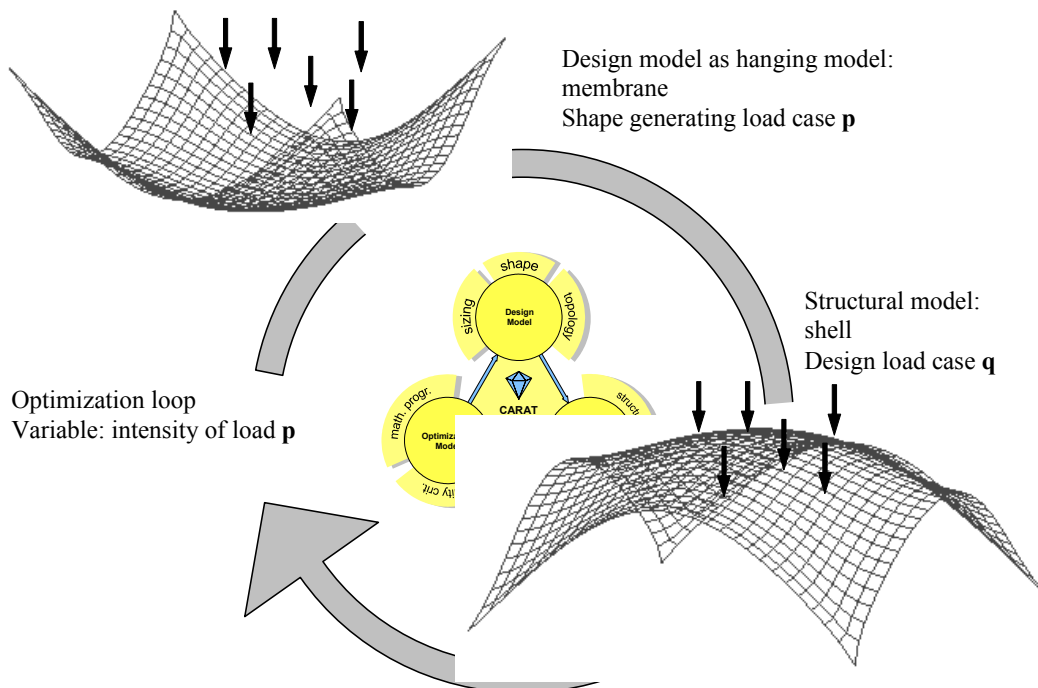


Abb. 9: Hängemodell als Entwurfsmodell in der Optimierungsschleife.

3.2.3 Filtertechniken

Ohne Maßnahmen richten sich die Oszillationen in der Lösung einer parameterfreien Formoptimierung nach der Feinheit des Netzes. Sie zeigen sich nicht nur an der Geometrie sondern bereits auch an den Strukturantworten, wie zum Beispiel den Sensitivitäten von Verschiebungen und Spannungen bezüglich Änderungen der Formvariablen. Es können demzufolge Filter eingesetzt werden, die sich an den Antworten orientieren. So wird die Sensitivität bezüglich einer Variablen innerhalb des vorgegebenen Filterradius mit den Sensitivitäten bezüglich der „Nachbarvariablen“ gemittelt. Dabei werden der Abstand zu den Nachbarn und die aktuellen Werte der entsprechenden Variablen am Aufpunkt e und bei den Nachbarn $i=1..N$ berücksichtigt:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_e} = \frac{1}{x_e \sum_{i=1}^N \hat{H}_i} \sum_{i=1}^N \hat{H}_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (11)$$

Der Filteroperator \hat{H} berücksichtigt dabei den „Abstand“ benachbarter Variablen:

$$\hat{H}_i = r_{\min} - \text{dist}(e, i) \quad (12)$$

Dabei ist r_{\min} der Glättungsradius und die Abstandsfunktion ist z.B. als der Mittelpunktsabstand von Elementen definiert. Bei der Topologieoptimierung wird diese Stabilisierungsmethode analog verwendet, um physikalisch falsche Schachbrettmuster zu vermeiden. So kann z.B. durch die Vorgabe dreier Werte: Filterradius, Filterabstand und Filtertyp eine komplexe Sickenoptimierung durchgeführt werden, wobei die Raumkoordinaten aller FE-Knoten variiert werden können. Der Modellierungsaufwand kann auf ein Minimum reduziert werden. Dabei ist die Formfreiheit so groß wie möglich und doch gleichzeitig über die Wahl der Filterfunktionen geregelt. Die Orte, wo sich Sicken bilden werden ergeben sich aus den mechanischen Notwendigkeiten, um die Steifigkeit zu maximieren. Bei der Lösung des Problems wurde die NAND-Technologie in Verbindung mit der adjungierten Sensitivitätsanalyse verwendet. Als Optimierungsalgorithmus wird eine einfache Gradientenmethode verwendet (steilster Abstieg), Abb. 10.

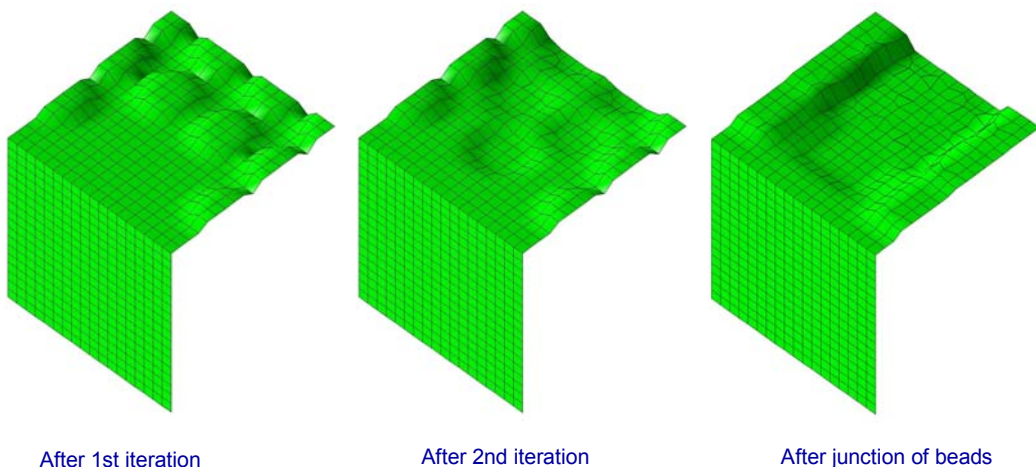


Abb. 10: Sickenoptimierung; Entstehung erster Sicken und Vereinigung

4 Zusammenfassung

Der Erfolg einer Formoptimierung wird wesentlich von Flexibilität und Stabilität der Verfahren bestimmt, die für Kontrolle und Modifikation der Geometrie verwendet werden. Die Vorzüge von CAD/CAGD-Methoden hinsichtlich Modellparametrisierung werden meist vom Modellierungsaufwand aufgezehrt, so dass damit eine Formoptimierung in der Konzeptphase einer Produktentwicklung i.d.R. nicht möglich, weil zu aufwändig, ist. Die „parameterfreie“ Optimierung direkt am FE-Netz erlaubt dagegen einen flexiblen Einsatz bei großen Formfreiheiten und einem Minimum an Modellierungsaufwand, setzt allerdings die Verwendung zusätzlicher Stabilisierungsverfahren voraus, um physikalische Sinnfälligkeit der Ergebnisse zu garantieren. Bei allen Methoden wird jedoch vorausgesetzt, dass der Anwender die möglichen Formfreiheiten antizipieren und beurteilen kann, da sie eine direkte Folge der jeweils getroffenen Modellentscheidungen sind. Dabei durchdringen sich physikalische, geometrische und Aspekte der FE-Technologie in komplexer Weise.

5 Referenzen

- ARORA, J.S.; WANG, Q.: Review of formulations for structural and mechanical system optimization. *Struct. Multidisc. Optim.* 30, 251-272 (2005).
- BLETZINGER, K.-U.; WÜCHNER, R.; DAOUD, F.; CAMPRUBÍ, M.: Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194, 3438-3452 (2005).
- CAMPRUBÍ, N.; BISCHOFF, M.; BLETZINGER, K.-U.: Shape optimization of shells and locking. *Computers & Structures* 82, 2551-2561 (2004).
- WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U.: Stress-adapted numerical form finding of prestressed surfaces by the updated reference strategy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64, 143-166 (2005).
- DAOUD, F.; CAMPRUBI, N.; BLETZINGER, K.-U.: Filtering and regularization techniques in shape optimization with CAD-free parametrization. In: *NATO Advanced Research Workshop on Multi-physics and Multi-scale Computer Models in Non-linear Analysis and Optimal Design of Engineering Structures Under Extreme Conditions*, Bled, Slovenia, June 13 – 17, 2004.
- SIGMUND, O.; PETERSON, P.: Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Struct. Multidisc. Optim.*, 16: 68-75 (1998).
- MAUTE, K.; NIKBAY, M.; FARHAT, C.: Sensitivity Analysis and Design Optimization of Three-Dimensional Nonlinear Aeroelastic Systems by the Adjoint

Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 56, 911-933 (2003).

LAPORTE, E.; LETALLEC, P.: Numerical methods in sensitivity analysis and shape optimization, Birkhäuser, Boston, 2003.

CHARGIN, M.K.; RAASCH, I.; BRUNS, R.; DEUERMEYER, D.: General Shape Optimization Capability. *Finite Elements in Analysis and Design* 7, 343-354, (1991).